

# RENDICONTI

DELLE SEDUTE

DELLA REALE ACCADEMIA DEI LINCEI

Classe di scienze fisiche, matematiche e naturali.

*Seduta del 20 aprile 1902.*

P. BLASERNA, Vicepresidente.

## MEMORIE E NOTE

DI SOCI O PRESENTATE DA SOCI

**Matematica.** — *Formole fondamentali nella teoria generale delle varietà e della loro curvatura.* Nota del Corrispondente G. RICCI.

Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Matematica.** — *Costruzione mediante integrali definiti di funzioni armoniche o poli-armoniche nell'area esterna ad un'ellisse, per date condizioni al contorno.* Nota del dott. TOMMASO BOGGIO, presentata dal Socio V. CERRUTI.

In questa Nota espongo un procedimento assai semplice che permette di ottenere espressa, mediante integrali definiti, la funzione armonica nell'area esterna ad una data ellisse e che, sul contorno di questa, assume valori assegnati <sup>(1)</sup>; e, più in generale, la funzione *m*-armonica in questa

(1) Nella Nota del prof. Morera: *Alcune considerazioni relative alla Nota del prof. Pizzetti: « Sull'espressione della gravità, ecc. »*. (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, vol. III, 1° semestre 1894) è esposto un procedimento che permette di costruire la funzione armonica nel campo esterno od interno ad un dato ellissoide e che sul contorno assume gli stessi valori che un polinomio dato di secondo grado; tale funzione, dedotta dall'espressione della funzione potenziale dell'ellissoide, è espressa mediante integrali

stessa area e che, sul contorno, assume colle sue derivate normali successive dei primi  $m - 1$  ordini, dei valori dati.

I risultati precedenti si ottengono osservando che l'area esterna ad una data ellisse può trasformarsi, mediante una inversione per raggi vettori reciproci, nell'area interna ad una *Lumaca di Pascal* non passante pel suo polo, e quest'area, a sua volta, può rappresentarsi conformemente su un cerchio mediante polinomi.

1. Sia  $s'$  un'ellisse di fuochi  $F, F'$ ; diciamo  $\sigma'$  l'area esterna ad  $s'$ , e supponiamo i suoi punti riferiti ad un sistema di coordinate cartesiane ortogonali  $x', y'$  di cui l'origine sia il fuoco  $F$  e l'asse  $Fx'$  sia l'asse focale.

Si tratta di costruire la funzione  $u'$ , regolare in  $\sigma'$ , e che soddisfa alle equazioni:

$$(1) \quad \begin{cases} \Delta'^2 u' = 0 & \text{in } \sigma' \\ u' = \Phi' & \text{su } s', \end{cases} \quad \left( \Delta'^2 = \frac{\partial^2}{\partial x'^2} + \frac{\partial^2}{\partial y'^2} \right),$$

ove  $\Phi'$  indica una funzione continua dei punti di  $s'$ , comunque assegnata.

Osserviamo perciò che se si riferiscono i punti di  $\sigma'$  alle coordinate polari  $(r', \varphi)$ , assumendo come polo il fuoco  $F$  e come asse polare l'asse focale  $Fx'$ , l'equazione polare di  $s'$  è:

$$(2) \quad r' = \frac{p}{1 + e \cos \varphi},$$

nella quale  $p$  indica il semiparametro, ed  $e$  l'eccentricità ( $e < 1$ ).

Supponendo, per semplicità,  $p = 1$ , e facendo una inversione per raggi vettori reciproci assumendo il fuoco  $F$  come centro dell'inversione, e supponendo eguale ad 1 il modulo di essa, si ha:

$$(3) \quad r' r_1 = 1$$

$$(4) \quad x_1 = \frac{x'}{r'^2}, \quad y_1 = \frac{y'}{r'^2}$$

ove  $r_1, \varphi$  ed  $x_1, y_1$  sono rispettivamente le coordinate polari e cartesiane del punto trasformato di  $(x', y')$ .

L'equazione (2) diventa pertanto:

$$(5) \quad r_1 = 1 + e \cos \varphi,$$

la quale, essendo  $e < 1$ , rappresenta una *Lumaca di Pascal* non passante

---

definiti. Per quanto riguarda il campo interno ad una ellisse o ad un ellissoide cfr. anche la mia Nota: *Sopra alcune funzioni armoniche o bi-armoniche in un campo ellittico od ellissoidico* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LX, parte 2<sup>a</sup>, a. 1901).



pel suo polo; l'ellisse  $s'$  si è dunque trasformata, mediante l'inversione, nella curva  $s_1$  data dalla (5), e l'area  $\sigma'$  esterna ad  $s'$  nell'area  $\sigma_1$  interna ad  $s_1$ .

Chiamando  $u_1$ ,  $\Phi_1$  le funzioni  $u'$ ,  $\Phi'$  espresse mediante le variabili  $x_1, y_1$ , il sistema (1) potrà scriversi:

$$(6) \quad \begin{cases} \Delta_1^2 u_1 = 0 & \text{in } \sigma_1, \\ u_1 = \Phi_1 & \text{su } s_1, \end{cases} \quad \left( \Delta_1^2 = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} \right).$$

Per risolvere il sistema precedente conviene fare la rappresentazione conforme dell'area  $\sigma_1$  sopra un cerchio. Se indichiamo con  $\sigma$  il cerchio di raggio 1, appartenente al piano  $xy$ , e col centro nell'origine delle coordinate, la rappresentazione conforme di  $\sigma_1$  sul cerchio  $\sigma$  si eseguisce colle formole <sup>(1)</sup>

$$(7) \quad \begin{cases} x_1 = \frac{e}{2} + x + \frac{e}{2}(x^2 - y^2) \\ y_1 = y + e xy. \end{cases}$$

Infatti riferendo i punti del cerchio  $\sigma$  alle coordinate polari  $r, \theta$  in modo che

$$x = r \cos \theta, \quad y = r \sin \theta,$$

le formole precedenti possono anche scriversi:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{e}{2} + r \cos \theta + \frac{e}{2} r^2 \cos 2\theta \\ y_1 = r \sin \theta + \frac{e}{2} r^2 \sin 2\theta, \end{cases}$$

onde, per  $r = 1$ , cioè alla circonferenza  $s$  di  $\sigma$ , corrisponde la curva:

$$\begin{cases} x_1 = \frac{e}{2} + \cos \theta + \frac{e}{2} \cos 2\theta \\ y_1 = \sin \theta + \frac{e}{2} \sin 2\theta, \end{cases}$$

ossia:

$$\begin{cases} x_1 = (1 + e \cos \theta) \cos \theta \\ y_1 = (1 + e \cos \theta) \sin \theta, \end{cases}$$

cioè:

$$r_1 = 1 + e \cos \theta,$$

che è precisamente la (5).

<sup>(1)</sup> Almansi, *Sulla ricerca delle funzioni poli-armoniche in un'area piana*, ecc. (Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XIII, a. 1899).

Se diciamo  $u, \Phi$  le funzioni  $u_1, \Phi_1$  espresse mediante le variabili  $x, y$ , il sistema (6) si trasforma in quest'altro

$$(8) \quad \begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } \sigma, \\ u = \Phi & \text{su } s, \end{cases} \quad \left( \Delta^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right).$$

In tal modo abbiamo dunque ricondotto la risoluzione del problema di Dirichlet nell'area  $\sigma'$  esterna all'ellisse  $s'$  alla risoluzione del problema di Dirichlet per l'area circolare  $\sigma$  <sup>(1)</sup>.

2. Si voglia ad es. costruire la funzione  $u'$ , armonica nell'area  $\sigma'$ , e che sul contorno  $s'$  assume gli stessi valori della funzione  $\frac{1}{r'^2}$ .

Dovremo porre  $\Phi' = \frac{1}{r'^2}$ , onde il sistema (1) diventa:

$$\begin{cases} \Delta'^2 u' = 0 & \text{in } \sigma' \\ u' = \frac{1}{r'^2} & \text{su } s'; \end{cases}$$

facendo la trasformazione (3), (4) esso si muta nel seguente, analogo al (6):

$$\begin{cases} \Delta_1^2 u_1 = 0 & \text{in } \sigma_1 \\ u_1 = r_1^2 & \text{su } s_1; \end{cases}$$

applicando le (7) ed osservando che sulla circonferenza  $s$  si ha:

$$r_1^2 = x_1^2 + y_1^2 = \frac{e^2}{2} + 1 + ex + \frac{e^2}{2}(x^2 - y^2) + ex = 1 + ex + ex_1,$$

si otterrà, dal sistema precedente, quest'altro, analogo all'(8):

$$\begin{cases} \Delta^2 u = 0 & \text{in } \sigma \\ u = 1 + e(x + x_1) & \text{su } s; \end{cases}$$

e poichè la funzione  $1 + e(x + x_1)$  è armonica, si può porre, in ogni punto del cerchio  $\sigma$ :

$$(9) \quad u = 1 + e(x + x_1).$$

Cerchiamo ora la funzione  $u_1$ , cioè la funzione  $u$  espressa mediante le variabili  $x_1, y_1$ ; dobbiamo perciò esprimere anzitutto  $x, y$  in funzione di  $x_1, y_1$ .

(1) Ponendo:  $z' = x' - iy'$ ,  $z = x + iy$ , la rappresentazione conforme di  $\sigma'$  su  $\sigma$  è data dalla formola:

$$z' = \frac{2}{e + 2z + ez^2}.$$



Dalle (7), eliminando  $x$ , si ha l'equazione:

$$e^2 y^4 + (1 - e^2 + 2 e x_1) y^2 - y_1^2 = 0,$$

che fornisce per  $y^2$  due valori, uno positivo e l'altro negativo; si dovrà tener conto solo del valore positivo che è:

$$y^2 = \frac{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}}{2 e^2};$$

ne viene:

$$y = \pm \frac{1}{e \sqrt{2}} \sqrt{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}};$$

è poi chiaro che  $y$  ed  $y_1$  devono avere lo stesso segno.

Sostituendo nella seconda delle (7), che può scriversi:  $1 + e x = \frac{y_1}{y}$ ,

si ha:

$$\begin{aligned} 1 + e x &= \frac{e y_1 \sqrt{2}}{\sqrt{-(1 - e^2 + 2 e x_1) + \sqrt{(1 - e^2 + 2 e x_1)^2 + 4 e^2 y_1^2}}} = \\ &= \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + 2 e x_1 + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) x_1 + 4 e^2 r_1^2}}. \end{aligned}$$

Abbiamo così  $x, y$  in funzione di  $x_1, y_1$ ; quindi la (9) porge:

$$u_1 = e x_1 + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + 2 e x_1 + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) x_1 + 4 e^2 r_1^2}}.$$

Passando infine dalle variabili  $x_1, y_1$  alle  $x', y'$  mediante l'inversione (4) e poi introducendo le coordinate polari  $r', \varphi$ , si ha:

$$u' = \frac{e \cos \varphi}{r'} + \frac{\sqrt{2}}{2} \sqrt{1 - e^2 + \frac{2 e \cos \varphi}{r'} + \sqrt{(1 - e^2)^2 + 4 e (1 - e^2) \frac{\cos \varphi}{r'} + \frac{4 e^2}{r'^2}}}.$$

Questa espressione di  $u'$  è quella cercata.

È infatti facile verificare che questa funzione è armonica in  $\sigma'$ , inoltre nei punti di  $s'$  ha per valore  $\frac{1}{r'^2}$ , infine per  $r' = \infty$  assume il valore  $\sqrt{1 - e^2}$ , onde, seguendo una nota denominazione (1), si può dire che la funzione  $u'$  è regolare all'infinito; quindi essa soddisfa a tutte le condizioni poste.

(1) Picard, *Traité d'Analyse*, t. II, chap. II.

3. Determiniamo ora la funzione  $u'$ , regolare nell'area  $\sigma'$ , e che soddisfa alle equazioni:

$$(10) \quad \begin{cases} \Delta'^4 u' = 0 & \text{in } \sigma' \\ u' = \Phi', \frac{\partial u'}{\partial n'} = \Psi' & \text{su } s', \end{cases} \quad (\Delta'^4 = \Delta'^2 \Delta'^2),$$

in cui  $n'$  indica la normale interna a  $\sigma'$ , e  $\Phi'$ ,  $\Psi'$  sono funzioni date dei punti di  $s'$  (1).

Converrà fare l'inversione (4) e il cambiamento di funzione espresso dalla formola:

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{u'(x', y')}{r'^2},$$

perchè in tal caso si avrà, come è noto (2):

$$\Delta_1^4 u_1 = r'^6 \Delta'^4 u',$$

quindi il sistema (10) si muterà nel seguente:

$$\begin{cases} \Delta_1^4 u_1 = 0 & \text{in } \sigma_1 \\ u_1 = \Phi_1, \frac{\partial u_1}{\partial n_1} = \Psi_1 & \text{su } s_1, \end{cases}$$

ove  $n_1$  è la normale interna all'area  $\sigma_1$ , limitata dalla curva  $s_1$ , che, come si vide nel § 1, è una *Lumaca di Pascal* non passante pel suo polo, e  $\Phi_1$ ,  $\Psi_1$  sono funzioni date dei punti di  $s_1$ .

La funzione  $u_1$ , come è noto (3), può ottenersi espressa mediante integrali definiti trasformando, per mezzo delle (7), l'area  $\sigma_1$  nell'area circolare  $\sigma$ .

4. Più in generale, si voglia determinare la funzione  $u'$ , regolare in  $\sigma'$  e che soddisfa alle equazioni

$$(11) \quad \begin{cases} \Delta'^{2m} u' = 0 & \text{in } \sigma' \\ \frac{\partial^i u'}{\partial n'^i} = \Phi'_i & \text{su } s', \quad (i = 0, 1, \dots, m-1), \end{cases}$$

le  $\Phi'_i$  essendo funzioni date nei punti di  $s'$ .

(1) Il problema analogo per l'area interna all'ellisse  $s'$  l'ho risolto nella mia Nota: *Integrazione dell'equazione  $\Delta^2 A^2 = 0$  in un'area ellittica* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LX, parte 2<sup>a</sup>, a. 1901).

(2) Levi-Civita, *Sopra una trasformazione in sè stessa dell'equazione  $\Delta_2 A_2 = 0$*  (Id., t. IX, serie VII, a. 1898).

(3) Almansi, Memoria citata. Cfr. anche Almansi, *Integrazione della doppia equazione di Laplace* (Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5<sup>a</sup>, vol. IX, 1<sup>o</sup> semestre, 1900).



Converrà eseguire l'inversione (4) e il cambiamento di funzione:

$$u_1(x_1, y_1) = \frac{u'(x', y')}{r'^{2m-2}},$$

perchè in tal caso, come è noto (1), se si ha  $A'^{2m}u' = 0$ , sarà pure:  $A_1^{2m}u_1 = 0$ ; per conseguenza il sistema (11) si trasforma nel seguente:

$$\begin{cases} A_1^{2m}u_1 = 0 & \text{in } \sigma_1 \\ \frac{\partial^i u_1}{\partial n_1^i} = \Phi_{1i} & \text{su } s_1, \quad (i = 0, 1, \dots, m-1), \end{cases}$$

le  $\Phi_{1i}$  indicando funzioni date nei punti di  $s_1$ .

La funzione  $u_1$  che soddisfa a queste equazioni può ottenersi espressa per mezzo di integrali definiti (1), trasformando, mediante le (7), l'area  $\sigma_1$  nel cerchio  $\sigma$ .

5. Consideriamo infine l'area S interna alla curva di equazione:

$$\frac{X^2}{a^2} + \frac{Y^2}{b^2} = (X^2 + Y^2)^2,$$

ove X, Y sono le coordinate cartesiane ortogonali di un punto, ed a, b sono costanti. Mediante una inversione, per raggi vettori reciproci, di centro l'origine delle coordinate X, Y, la curva precedente può trasformarsi in un'ellisse  $s'$  e l'area S nell'area  $\sigma'$  esterna a tale ellisse.

Per quanto precede si conclude che si può sempre ottenere espressa con integrali definiti, la funzione m-armonica in S e che al contorno assume, colle sue derivate normali successive dei primi  $m-1$  ordini, dei valori assegnati.

**Meccanica.** — *Sopra un teorema di Levi-Civita riguardante la determinazione di soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano.* Nota del dott. P. BURGATTI, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Il prof. T. Levi-Civita, in una Nota comunicata a questa R. Accademia (2), ha enunciato e dimostrato un notevole teorema, il quale insegna a determinare delle soluzioni particolari di un sistema Hamiltoniano, quando se ne conosce qualche integrale o relazione invariante.

Siano  $q_1, q_2 \dots q_n, p_1, p_2 \dots p_n$  le due serie di variabili che definiscono lo stato di moto di un sistema olonomo a legami indipendenti dal tempo,

(1) Volterra, *Sulle funzioni poli-armoniche* (Atti del R. Istituto Veneto di scienze, lettere ed arti, t. LVII, a. 1899).

(2) *Sulla determinazione di soluzioni particolari*, ecc. Rendiconti della Classe di sc. fis., mat. e nat., vol. X, serie 5<sup>a</sup>, 1901.







quindi

$$d b_{r1} = \sum_{i=2}^m X_1(b_{ri}) dx_i.$$

Essendo

$$X_1(b_{ri}) = \frac{\partial b_{ri}}{\partial x_1} + b_{11} \frac{\partial b_{ri}}{\partial x_{m+1}} + \dots + b_{n1} \frac{\partial b_{ri}}{\partial x_{m+n}},$$

si vede facilmente che esso sarà identicamente nullo in virtù delle (4)

quando sia  $\frac{\partial b_{ri}}{\partial x_1} = 0$ , quando cioè le  $b_{ri}$  non contengono la  $x_1$ . Si conclude:

*Se i coefficienti del sistema (2) completamente integrabile non contengono la variabile indipendente  $x_s$ , le equazioni*

$$b_{s1} = 0, b_{s2} = 0, \dots, b_{sn} = 0,$$

*che si ottengono uguagliando a zero i coefficienti di  $dx_s$ , somministrano una soluzione particolare del sistema proposto.*

2. Di questo teorema ce ne serviremo ora per determinare delle soluzioni particolari del sistema Hamiltoniano (0), quando se ne conoscono  $k$  integrali in involuzione.

Siano

$$(5) \quad p_1 - \varphi_1 = 0, p_2 - \varphi_2 = 0, \dots, p_k - \varphi_k = 0$$

gl'integrali in parola risolti rispetto a  $p_1, p_2, \dots, p_k$ , ove le  $\varphi$  saranno in generale funzioni delle rimanenti  $p$ , di tutte le  $q$  e di  $t$ . Anche la funzione  $H$  potrà contenere  $t$ ; giacchè noi togliamo per ora le restrizioni che abbiamo enunciate in principio sul sistema olonomo che dà luogo alle (0). Ciò posto, decomponiamo il sistema Hamiltoniano nei tre gruppi seguenti, contraddistinti dalle indicazioni (a), (b), (c):

$$(a) \quad \frac{dq_1}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_1}, \dots, \frac{dq_k}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_k}$$

$$(b) \quad \frac{dp_1}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_1}, \dots, \frac{dp_k}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_k}$$

$$(c) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} \quad (i = k+1, \dots, n).$$

Se nelle equazioni del 2° gruppo si sostituiscono alle  $p_1, p_2, \dots, p_k$  le funzioni  $\varphi$ , e si tien conto delle (a) e (c), si trova

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial t} + \frac{\partial H}{\partial q_r} + \sum_{s=1}^k \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_s} \frac{\partial H}{\partial p_s} + [\varphi_r, H]_{k+1} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, k),$$



ove l'indice  $k+1$  nella parentesi di Poisson sta ad indicare che la sommatoria, rappresentata da quel simbolo, va estesa da  $k+1$  fino ad  $n$ . Indicando poi con  $H'$  ciò che diventa  $H$  dopo aver sostituito le  $q_r$  alle  $p_r$ , si deducono subito le relazioni:

$$(6) \quad \begin{aligned} \frac{\partial H}{\partial q_s} &= \frac{\partial H'}{\partial q_s} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial q_i}{\partial q_s} & (s = 1, 2, \dots, n) \\ \frac{\partial H}{\partial p_s} &= \frac{\partial H'}{\partial p_s} - \sum_{i=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial p_i}{\partial p_s} & (s = k+1, \dots, n). \end{aligned}$$

Le quali, combinate opportunamente con le precedenti, conducono, dopo calcoli facili e ben noti <sup>(1)</sup>, alle relazioni seguenti:

$$(7) \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial t} + \frac{\partial H'}{\partial q_r} + [\varphi_r, H']_{k+1} = 0, \quad (r = 1, 2, \dots, k)$$

che devono essere identicamente soddisfatte.

Consideriamo ora l'equazioni (c), le quali in virtù delle (6) diventano

$$\begin{aligned} \frac{dq_i}{dt} &= \frac{\partial H'}{\partial p_i} - \sum_{r=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} \\ \frac{dp_i}{dt} &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_r} \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} \end{aligned} \quad (i = k+1, \dots, n),$$

ove bisognerà immaginare sostituite nelle sommatorie le  $q_s$  alle  $p_s$ . Vediamo se è possibile definire le  $p_i$  e  $q_i$  ( $i = k+1, \dots, n$ ) in funzione di  $t, q_1, q_2, \dots, q_k$  in guisa che queste equazioni risultino soddisfatte in virtù delle (a). Dovrà essere

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} - \frac{\partial H'}{\partial p_i} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_r} \left( \frac{\partial q_i}{\partial q_r} + \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} \right) &= 0 \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} + \frac{\partial H'}{\partial q_i} + \sum_{r=1}^k \frac{\partial H}{\partial p_r} \left( \frac{\partial p_i}{\partial q_r} - \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} \right) &= 0 \end{aligned} \quad (i = k+1, \dots, n).$$

A queste si soddisfa definendo le  $p_i$  e  $q_i$  mediante il sistema:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q_i}{\partial t} &= \frac{\partial H'}{\partial p_i}, \quad \frac{\partial q_i}{\partial q_r} = -\frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} & (i = k+1, \dots, n) \\ \frac{\partial p_i}{\partial t} &= -\frac{\partial H'}{\partial q_i}, \quad \frac{\partial p_i}{\partial q_r} = \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} & (r = 1, 2, \dots, k), \end{aligned}$$

(1) Vedi in particolare la Nota citata del Levi-Civita.

il che sarà possibile, quando per le equazioni ai differenziali totali

$$(8) \quad \begin{aligned} dq_i &= \frac{\partial H'}{\partial p_i} dt - \sum_{r=1}^k \frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} dq_r \\ dp_i &= - \frac{\partial H'}{\partial q_i} dt + \sum_{r=1}^k \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} dq_r, \end{aligned} \quad (i = k+1, \dots, n)$$

che equivalgono a quel sistema, siano soddisfatte le condizioni d'integrabilità. È facile vedere che ciò avviene, ricorrendo alle (7) e alle condizioni d'involuzione. Questo, del resto, è ben noto; ed è anche noto che dalle (8) si deducono conseguenze importanti per la teoria generale dei sistemi Hamiltoniani.

Ma, giunti a questo punto, ci possiamo proporre di determinare delle soluzioni particolari delle (8); per esempio delle soluzioni in cui le  $q_i$  e  $p_i$  sieno funzioni di  $q_1, q_2, \dots, q_k$  e non di  $t$ . In virtù del teorema dimostrato nel paragrafo precedente, ciò sarà possibile quando i coefficienti delle (8) non contengono  $t$ ; quando cioè  $H'$  e le  $\varphi$  non dipendono da  $t$ . Stando in queste ipotesi, il teorema ricordato ci dice che le soluzioni particolari sono definite dalle equazioni:

$$\frac{\partial H'}{\partial p_i} = 0 \quad \frac{\partial H'}{\partial q_i} = 0, \quad (i = k+1, \dots, n)$$

che si ottengono uguagliando a zero i coefficienti di  $dt$ . Queste equazioni insieme alla (a) e (5) definiscono  $\infty^{2k}$  moti, che sono i moti stazionari indicati dal Levi-Civita. Così la ricerca di questi moti è direttamente collegata alla classica teoria dei sistemi Hamiltoniani.

Più generalmente possiamo supporre che  $H'$  e le  $\varphi$ , pur contenendo il tempo, non dipendano da una delle variabili  $q_1, q_2, \dots, q_k$ , per esempio dalla  $q_r$ . In tal caso il sistema (8) ammetterà la soluzione particolare definita dalle equazioni:

$$\frac{\partial \varphi_r}{\partial p_i} = 0 \quad \frac{\partial \varphi_r}{\partial q_i} = 0 \quad (i = k+1, \dots, n);$$

le quali unite alle (a) e (5) definiranno  $\infty^{2k}$  moti particolari del sistema dinamico. Questi moti però non saranno, in generale, moti stazionari.



**Matematica.** — *L'ordine della varietà che annulla i subdeterminanti di un dato grado di un determinante emisimmetrico.*

Nota del prof. FRANCESCO PALATINI, presentata dal Socio SEGRE.

In una interessante Nota <sup>(1)</sup> il prof. Segre, partendo da due importanti formole date dal sig. H. Schubert, risolve i due seguenti problemi « Determinare gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti: 1° da una matrice qualsiasi con elementi affatto generici; 2° da una matrice quadrata simmetrica ». Un altro caso notevole da esaminare è quello della varietà che annulla i subdeterminanti del grado  $2r+2$  (e quindi anche quelli del grado  $2r+1$ ) di un dato determinante emisimmetrico del grado  $n+1$ . La dimensione di questa varietà è  $r(2n-2r+1)-1$ , il che può vedersi p. e. applicando il teor. II del § V della Memoria, *Ueber dass Pfaffsche Problem*, del Frobenius <sup>(2)</sup>.

La questione di cui ci occupiamo equivale a quest'altra. Si considerino in uno spazio  $[n]$  tutti gli  $\infty^m$  (porremo  $m = \frac{(n+2)(n-1)}{2}$ ) complessi lineari di rette <sup>(3)</sup>, e per semplicità di linguaggio si rappresentino linearmente coi punti di un  $[m]$ . Ciascun complesso dà luogo ad un sistema nullo, cioè ad una reciprocità tale che ogni punto sta nell'iperpiano che gli corrisponde, e il determinante di questa reciprocità è un emisimmetrico del grado  $n+1$ . Se tutti i minori di grado  $2r+2$  si annullano, allora il complesso è degenere, e precisamente possiede uno spazio-centro di dimensione  $n-2r$ , uno spazio tale cioè che ogni retta ad esso incidente appartiene al complesso. Si tratta dunque di trovare l'ordine, che indicheremo con  $x_{n-2r}$ , della varietà, che rappresenteremo con  $V_{r(2n-2r+1)-1}^{(n-2r)}$ , di  $[m]$

la quale corrisponde all'insieme di quei complessi di  $[n]$  che sono dotati di  $[n-2r]$ -centro (almeno). Per  $n=2q+1$ ,  $r=q$  si vede immediatamente che la nostra varietà è di ordine  $q+1$ , cioè che sono  $q+1$  i complessi di un fascio generico di complessi di  $[n]$  (corrispondente ad una retta generica di  $[m]$ ) dotati di retta-centro <sup>(4)</sup>. Per  $n=2q$ ,  $r=q-1$

<sup>(1)</sup> *Gli ordini delle varietà che annullano i determinanti dei diversi gradi estratti da una data matrice*, Rend. Acc. Lincei, 1900, serie 5<sup>a</sup>, vol. IX.

<sup>(2)</sup> Crelle, vol. 82, 1876.

<sup>(3)</sup> In seguito si dirà *complesso* semplicemente in luogo di *complesso lineare di rette*.

<sup>(4)</sup> Cfr. Castelnuovo, *Ricerche di geometria della retta nello spazio a quattro dimensioni*, Atti Ist. Ven., 1891, serie VII, vol. 2°.

si ha che l'ordine cercato è  $\frac{q(q+1)(2q+1)}{6}$ , perchè generalizzando il procedimento seguito dal prof. Castelnuovo nel n. 10 del citato lavoro, si trova che appunto questo è il numero dei complessi di  $[2q]$  dotati di piano-centro contenuti in un sistema triplo generico di complessi di  $[n]$  (corrispondente ad un  $[3]$  generico di  $[m]$ ).

Nello studio dei sistemi lineari di complessi di  $[n]$  ha una speciale importanza la varietà  $M_{m-1}^r$  (di dimensione  $m-1$  e ordine  $r$ ) che in  $[m]$  corrisponde all'insieme dei complessi di  $[n]$  passanti per i complessi degeneri di un dato  $[2r-1]$  <sup>(1)</sup>. Con  $M_{m-1}^1$  sarà da intendersi l'iperpiano che corrisponde all'insieme dei complessi passanti per una data retta. Ora mediante ovvia generalizzazione del ragionamento contenuto nel n. 3 di una mia Nota <sup>(2)</sup> si trova subito  $x_{n-2} = \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!}$

Venendo ora alla  $V_{4n-7}^{(n-4)}$  ( $r=2$ ), seghiamola con  $2n-6$  varietà  $M_{m-1}^2$  relative ad altrettanti spazi  $[3]$  di  $[n]$ , e otterremo una varietà di dimensione  $2n-1$  e ordine  $2^{2n-6} x_{n-4}$  che corrisponde all'insieme dei complessi dotati di  $[n-4]$ -centro incidente a quei  $2n-6$  spazi  $[3]$  e che indicheremo con  $W_{2n-1}$ . Generalizzando, ciò che è ben facile, il ragionamento del n. 4, V,  $\alpha$  della mia Nota citata vedesi che per questa varietà la  $V_{2n-2}^{(n-2)}$  è multipla secondo il numero  $\frac{(2n-6)!}{(n-3)!(n-2)!}$ , per cui segandola con un'altra  $M_{m-1}^2$  si otterrà, oltre alla  $V_{2n-2}^{(n-2)}$  contata un tal numero di volte, una varietà, che indicheremo con  $W_{2n-2}$ , la quale corrisponde all'insieme dei complessi dotati di  $[n-4]$ -centro incidente a  $2n-5$  spazi  $[3]$  ed ha per ordine  $2^{2n-5} x_{n-4} - \frac{(2n-6)!}{(n-3)!(n-2)!} x_{n-2}$ . Ed ora continuando a generalizzare il ragionamento del n. 4, V,  $\beta$ ,  $\gamma$ ,  $\delta$  della stessa Nota si giunge ad una varietà, che indicheremo con  $W_5$  di dimensione 5, che corrisponde all'insieme dei complessi dotati di  $[n-4]$ -centro incidente a  $4(n-3)$  spazi  $[3]$  ed il cui ordine è dato da

$$2^{4(n-3)} x_{n-4} - 2^{2n-7} \frac{(2n-6)!}{(n-3)!(n-2)!} x_{n-2} - \sum_{h=1}^{h=2n-7} (2^{2n-7-h} x_{n-4, n-2, h})$$

(1) Analoga importanza ha per lo studio dei sistemi lineari di quadriche di dimensione  $n-1$  di  $[n]$  la varietà di dimensione  $\frac{n(n+3)}{2} - 1$  e ordine  $r+1$  formata da quelle di queste quadriche che passano per le quadriche degeneri di dimensione  $r-1$  di un dato  $[r]$ .

(2) *Sui sistemi lineari di complessi lineari di rette nello spazio a cinque dimensioni*, Atti Ist. Ven., 1900, t. 60.



dove  $x_{n-4, n-2, h}$  rappresenta l'ordine della varietà  $U^{(n-4), (n-2), h}$  che corrisponde all'insieme dei complessi dotati di  $[n-2]$ -centro contenente un  $[n-4]$  appoggiato a  $2n-6+h$  spazi [3]. L'ordine di quest'ultima varietà, sempre tenendo presente il luogo citato della detta Nota, trovasi esser rappresentabile col simbolo

$$(2, 3, \dots, n) \mu_1^1 \mu_2^2 \dots \mu_{n-4}^{n-4} \mu_{n-3}^{2n-6+h} \mu_{n-2}^1 \mu_{n-1}^{2n-2-h} \quad (1)$$

il quale, in virtù del principio di dualità, equivale a

$$(n-3, n-2, n-1, n) \mu_1^1 \mu_2^{2n-2-h} \mu_3^1 \mu_4^{2n-6+h}$$

Se ora osserviamo che a  $4(n-3)$  spazi [3] è incidente un numero finito di spazi  $[n-4]$ , numero che è ben noto e che noi per ottenere maggior omogeneità nelle formole rappresenteremo (il che, com'è facile a vedersi, è lecito)

con  $(4, 5, \dots, n) \mu_1^1 \mu_2^2 \dots \mu_{n-4}^{n-4} \mu_{n-3}^{4(n-3)}$  al qual simbolo per la legge di dualità

possiamo sostituire quest'altro  $(n-3, n-2, n-1, n) \mu_1^1 \mu_2^2 \mu_3^3 \mu_4^{4(n-3)}$  che

equivale a  $\frac{1}{2}(n-3, n-2, n-1, n) \mu_1^1 \mu_2^4 \mu_3^1 \mu_4^{4(n-3)}$ ; e se notiamo inoltre

che ciascuno di questi  $[n-4]$  è centro per  $\infty^5$  complessi formanti un sistema lineare al quale in  $[m]$  corrisponde un [5], per cui la  $W_5$  si compone di tanti spazi [5] quanti sono indicati dal numero ultimamente scritto, il quale esprime perciò esso pure l'ordine di questa varietà; e se infine consideriamo che è

$$\begin{aligned} \frac{(2n-6)!}{(n-3)!(n-2)!} \cdot \frac{(2n-2)!}{n!(n-1)!} &= (2, 3, \dots, n) \mu_1^1 \dots \mu_{n-4}^{n-4} \mu_{n-3}^{2n-6} \mu_{n-2}^1 \mu_{n-1}^{2n-2} = \\ &= (n-3, n-2, n-1, n) \mu_1^1 \mu_2^{2n-2} \mu_3^1 \mu_4^{2n-6} \end{aligned}$$

possiamo scrivere

$$(1) \quad 2^{4(n-3)+1} x_{n-4} = \sum_{h=0}^{h=2n-6} [2^{2n-6-h} (n-3, n-2, n-1, n) \mu_1^1 \mu_2^{2n-2-h} \mu_3^1 \mu_4^{2n-6+h}]$$

Ora sviluppando  $(n-3, n-2, n-1, n) \mu_1^1 \mu_2^{2n-2-h} \mu_3^1 \mu_4^{2n-6+h}$  mediante la formola (16) del citato lavoro dello Schubert, ed applicando alcune convenienti riduzioni, risulta

$$\begin{aligned} &2^{4n-11} x_{n-4} = \\ &= \frac{2^2 \cdot 1! 3! (2n-6)! (2n-6)!}{(n-3)! (n-2)! (n-1)! n!} \cdot \sum_{h=0}^{h=2n-6} [2^{2n-6-h} (2n-6+h)_{2n-6} (2n-2-h)_4] \end{aligned}$$

(1) Per quanto riguarda il significato di questo simbolo vedasi H. Schubert, *Allgemeine Anzahlfunctionen* ecc., § 4, Math. Ann., t. 45, 1894.

e siccome applicando la formola

$$(2m)_m(2n)_{2n} + 2(2m-1)_m(2n+1)_{2n} \\ + 2^2(2m-2)_m(2n+2)_{2n} + \dots + 2^m m_m(2n+m)_{2n} = 2^{2m}(m+n)_n$$

la sommatoria dà per risultato  $2^{4n-13}(2n-5)(2n-4)$ , così in conclusione si ricava

$$x_{n-4} = \frac{1!3!(2n-6)!(2n-4)!}{(n-3)!(n-2)!(n-1!)n!}$$

Ed ora generalizzando il ragionamento precedente, si arriva senza difficoltà ad ottenere il valore di  $x_{n-2r}$  mediante una formola del tipo della (1), la quale però non apparisce semplificabile facilmente. Ad ogni modo le espressioni qui trovate per  $x_{n-2}$ ,  $x_{n-4}$  ci permettono di intuire che sarà

$$x_{n-2r} = \frac{[1!3!\dots(2r-1)!] \cdot [(2n-4r+2)!(2n-4r+4)!(2n-2r)!]}{(n-2r+1)!(n-2r+2)!\dots(n-1!)n!} \quad (1)$$

e con tanto maggior sicurezza possiamo asserire ciò in quanto che per  $n=2q+1$ ,  $r=q$  e per  $n=2q$ ,  $r=q-1$  quest'espressione ci fornisce i valori sopra indicati e trovati per altra via, mentre per  $n=2q$ ,  $r=q$  e per  $n=2q+1$ ,  $r=q+1$  essa diventa eguale ad 1, ciò che precisamente dev'essere.

**Meccanica.** — *La deformazione del diedro retto isotropo per speciali condizioni ai limiti.* Nota del prof. R. MARCOLONGO, presentata dal Socio V. CERRUTI.

Il prof. Somigliana in una recente Nota (Rend. Acc. Lincei, febbraio 1902), di cui certo non è sfuggita l'importanza ai cultori di Fisica matematica, ha indicato un metodo semplice e diretto per risolvere il problema della deformazione di un diedro retto isotropo o cristallino, con due piani di simmetria, allorchè sulle due superficie limiti sono note parte degli spostamenti e parte delle forze.

Il caso in cui sono dati o i soli spostamenti o le sole forze sfugge al metodo del Somigliana; nè sembra facile la sua trattazione col metodo generale Betti-Cerruti. Nel caso in cui si conoscano gli spostamenti superficiali, il problema è stato risolto assai elegantemente dal prof. Tedone (Rend. Acc. Lincei, dicembre 1901) per via di approssimazioni successive; forse al problema stesso potrebbe applicarsi con successo il così detto metodo alternante,

(<sup>1</sup>) Quest'espressione coincide, a meno del fattore  $2^{n-2r}$  con la prima delle (4) del citato lavoro del Segre.



partendo dalle formole della deformazione di un suolo isotropo indefinito (Problema di Boussinesq e Cerruti).

Tuttavia il metodo generale suddetto conduce con grandissima facilità alla risoluzione dei nuovi problemi del Somigliana; ed è ciò che, in breve, mi propongo di mostrare in questa Nota. Mi varrò costantemente, come in altri miei lavori, dei metodi e delle notazioni delle note *Ricerche ecc.* del Cerruti e della sua Memoria *Sulla deformazione ecc.* (Rend. Acc. Lincei, giugno 1888).

I. L'asse  $y$  sia lo spigolo del diedro isotropo i cui piani contengano le direzioni positive dei due semi-assi  $x$  e  $z$ : accenneremo con  $\sigma_1$  il semipiano  $x=0$  e con  $\sigma_2$  il semipiano  $z=0$ ;  $M$  è un punto qualunque di coordinate  $(x, y, z)$  variabile nello spazio  $S$  del diedro;  $M_1(x_1, y_1, z_1)$  un altro punto fisso dello stesso spazio. Siano:  $M'_1$  la immagine di  $M_1$  rispetto  $\sigma_1$ ;  $M''_1$  e  $M'''_1$  rispettivamente le immagini di  $M'_1$  ed  $M_1$  rispetto  $\sigma_2$  e diciamo  $r, r_1, r_2, r_3$  le distanze del punto  $M$  da  $M_1, M'_1, M''_1, M'''_1$ ; sicchè abbiamo:

$$r^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2; \quad r_1^2 = (x + x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z - z_1)^2 \\ r_2^2 = (x + x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z + z_1)^2; \quad r_3^2 = (x - x_1)^2 + (y - y_1)^2 + (z + z_1)^2$$

Consideriamo ora le seguenti funzioni di  $x, y, z$ , armoniche in tutto  $S$ ,

$$G = \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3}; \quad G' = -\frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_2} - \frac{1}{r_3} \\ G_1 = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r_1}; \quad G_3 = \frac{1}{r_2} + \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r_3}.$$

Osservando che si ha:

$$\begin{array}{lll} \text{per} & x=0 & r=r_1, \quad r_2=r_3 \\ & z=0 & r=r_3, \quad r_2=r_1 \end{array}$$

si deduce che sopra  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  la funzione  $G$  è tale che

$$G = \frac{1}{r}$$

La  $G$  è quindi la funzione di Green relativa allo spazio  $S$ ; e mediante questa è possibile assegnare, in un punto qualunque del campo, il valore di una funzione uniforme in  $S$  e che all'infinito soddisfa a certe note condizioni di convergenza, allorchè sono noti il valore del  $\mathcal{A}_2$  in ogni punto del campo e i valori della funzione al contorno. Applicando una formola ben nota si ha:

$$2\pi u(x_1, y_1, z_1) = -\frac{\partial}{\partial x_1} \int \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right) u \, d\sigma_1 - \frac{\partial}{\partial z_1} \int \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_1} \right) u \, d\sigma_2 - \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{r} - G \right) \mathcal{A}_2 u \, dS.$$

La funzione  $G'$  soddisfa al contorno alle condizioni seguenti:

$$x=0, \quad \frac{\partial G'}{\partial x} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}; \quad z=0, \quad \frac{\partial G'}{\partial z} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z};$$

quindi la  $G'$  è una funzione analoga a quella di Green relativa allo stesso spazio e che permette risolvere il problema precedente, allorchè però in superficie sono noti i valori della derivata normale di  $u$ ; infatti si trova:

$$2\pi u(x_1, y_1, z_1) = - \int \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_3} \right) \frac{\partial u}{\partial x} d\sigma_1 - \int \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) \frac{\partial u}{\partial z} d\sigma_2 - \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{r} - G' \right) A_2 u dS.$$

La funzione  $G_1$ , a sua volta, soddisfa al contorno alle condizioni:

$$x=0, \quad \frac{\partial G_1}{\partial x} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}; \quad z=0, \quad G_1 = \frac{1}{r},$$

e permetterà quindi di risolvere lo stesso problema, allorchè sul piano  $\sigma_1$  si conoscono i valori della derivata normale di  $u$  e sul piano  $\sigma_2$  i valori della funzione stessa: e si trova:

$$2\pi u(x_1, y_1, z_1) = - \int \left( \frac{1}{r} - \frac{1}{r_3} \right) \frac{\partial u}{\partial x} d\sigma_1 - \frac{\partial}{\partial z_1} \int \left( \frac{1}{r} + \frac{1}{r_1} \right) u d\sigma_2 - \frac{1}{2} \int \left( \frac{1}{r} - G_1 \right) A_2 u dS.$$

Così finalmente mediante la funzione  $G_3$  potremo risolvere il problema per così dire complementare, quando cioè sono noti su  $\sigma_1$  i valori di  $u$  e sopra  $\sigma_2$  i valori della derivata normale.

2. Vogliasi determinare, nel punto  $x_1, y_1, z_1$ , la deformazione di questo diedro isotropo soggetto a forze qualunque di massa, allorchè sui due piani limiti sono date le componenti tangenziali degli spostamenti e le componenti normali delle forze: si conoscono cioè:

$$\begin{array}{lll} \text{per } x=0 & \text{le} & L, \quad v, \quad w \\ \text{e per } z=0 & \text{le} & u, \quad v, \quad N. \end{array}$$

Come è ben noto la difficoltà maggiore del metodo consiste nel sapere assegnare la deformazione ausiliaria, in un punto generico  $x, y, z$ , di componenti  $\xi, \eta, \zeta$  corrispondenti a forze di massa nulle e tali che in superficie sia:

$$\begin{aligned} x=0, \quad L'_0 &= -2k\omega^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \frac{d \frac{1}{r}}{dn} = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}, \quad \eta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \zeta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}; \\ z=0, \quad \xi &= -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad N''_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}; \end{aligned}$$



le quali assai agevolmente si trasformano in queste altre:

$$\begin{aligned} x=0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial x} &= -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}, \quad \eta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \zeta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}; \\ z=0, \quad \xi &= -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \eta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial z^2}. \end{aligned}$$

La dilatazione cubica  $\vartheta$  è una funzione armonica in S e poichè su  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$  si ha:

$$\vartheta = \frac{\partial \xi}{\partial x} + \frac{\partial \eta}{\partial y} + \frac{\partial \zeta}{\partial z} = 0,$$

sarà, in tutto S,  $\vartheta = 0$ ; quindi anche le componenti  $\xi, \eta, \zeta$  di deformazione sono armoniche e la loro determinazione è un caso particolare dei problemi risolti nel § precedente. Ma senza applicare le formule generali, basterà osservare che la funzione armonica  $\frac{\partial G}{\partial x}$  è tale che:

$$\text{per } x=0, \quad \frac{\partial^2 G}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2}; \quad \text{e per } z=0, \quad \frac{\partial G}{\partial x} = \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}.$$

Sarà dunque:

$$\xi = -\frac{\partial G}{\partial x}.$$

Allo stesso modo si deduce:

$$\eta = -\frac{\partial G}{\partial y}; \quad \zeta = -\frac{\partial G}{\partial z}.$$

Determinata la deformazione ausiliaria, restano a determinare le forze da applicare in superficie perchè producano la deformazione precedentemente calcolata; e ciò si ottiene agevolmente dalle equazioni ai limiti. Infatti si ha già:

$$L'_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x^2},$$

e poi:

$$M'_0 = 2k\omega^2 \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \right)_{x=0}; \quad N'_0 = 2k\omega^2 \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} \right)_{x=0}.$$

Ma un breve calcolo mostra che:

$$\left( \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial y} \right)_{x=0} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{2}{r_3} - \frac{1}{r} \right); \quad \left( \frac{\partial^2 G}{\partial x \partial z} \right)_{x=0} = \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{2}{r_3} - \frac{1}{r} \right)$$

Quindi:

$$M'_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \left( \frac{2}{r_3} - \frac{1}{r} \right) ; \quad N'_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{2}{r_3} - \frac{1}{r} \right).$$

Un calcolo analogo dà pure:

$$L''_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{r} \right) ; \quad M''_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{r} \right) ; \quad N''_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial z^2} \left( \frac{2}{r_1} - \frac{1}{r} \right).$$

3. Questa deformazione ausiliaria permette di assegnare la dilatazione cubica  $\Theta$ , corrispondente alla effettiva deformazione, nel punto  $x_1 y_1 z_1$ .

Basta applicare infatti la formola del Betti, la quale nel caso in questione si riduce alla:

$$\begin{aligned} 4\pi\Omega^2\Theta(x_1 y_1 z_1) = & \frac{1}{k} \int \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x} \right) L d\sigma_1 + \frac{1}{k} \int \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} + \frac{\partial G}{\partial z} \right) N d\sigma_2 \\ & + \int \left\{ \left( \frac{1}{k} M'_0 - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y} \right) v + \left( \frac{1}{k} N'_0 - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right) w \right\} d\sigma_1 \\ & + \int \left\{ \left( \frac{1}{k} L''_0 - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z} \right) u + \left( \frac{1}{k} M''_0 - 2\omega^2 \frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z} \right) v \right\} d\sigma_2. \end{aligned}$$

Abbiamo invero supposte nulle le forze di massa; ma con ciò, come è noto, non si restringe la generalità del problema. La formola che darebbe nel caso generale la dilatazione, conterrebbe ancora tre altri termini relativi alle forze di massa.

Notando che:

$$\left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x_1} + \frac{\partial G}{\partial x} \right)_{x=0} = 2 \frac{\partial \frac{1}{r_3}}{\partial x_1} ; \quad \left( \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z_1} + \frac{\partial G}{\partial z} \right)_{z=0} = 2 \frac{\partial \frac{1}{r_1}}{\partial z_1}$$

e che:

$$\frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x_1 \partial y_1} ; \quad \frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x \partial z} = - \frac{\partial^2 \frac{1}{r_3}}{\partial x_1 \partial z_1} ; \text{ ecc.}$$

e ponendo:

$$\begin{aligned} \frac{2\pi\Omega^2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} P = & \frac{1}{k} \int \frac{L d\sigma_1}{r_3} + 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1} \int v \left( \frac{1}{r_3} - \frac{1}{r} \right) d\sigma_1 - 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial z_1} \int w \left( \frac{1}{r_3} + \frac{1}{r} \right) d\sigma_1 ; \\ \frac{2\pi\Omega^2\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} R = & \frac{1}{k} \int \frac{N d\sigma_2}{r_1} - 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial x_1} \int u \left( \frac{1}{r_1} + \frac{1}{r} \right) d\sigma_2 + 2\omega^2 \frac{\partial}{\partial y_1} \int v \left( \frac{1}{r_1} - \frac{1}{r} \right) d\sigma_2 \end{aligned}$$



risulta semplicemente:

$$\Theta = \frac{\omega^2}{\Omega^2 - \omega^2} \left( \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial z_1} \right).$$

Si osserverà che  $P$  e  $Q$  sono funzioni armoniche in tutto il diedro e risultano composte di funzioni potenziali di determinate distribuzioni superficiali (fatte sulle facce del diedro) e delle loro derivate.

4. Cognita la dilatazione cubica, la ricerca di  $u, v, w$  si riconduce ad uno dei problemi risolti nel § 1. Infatti abbiamo:

$$\Delta_2 u + \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \frac{\partial P}{\partial x_1} + \frac{\partial R}{\partial z_1} \right) = 0.$$

Sul piano  $z_1 = 0$  sono noti i valori di  $u$  e sul piano  $x_1 = 0$  essendo soddisfatta la:

$$\frac{1}{k} L + 2\omega^2 \frac{\partial u}{\partial x_1} + (\Omega^2 - 2\omega^2) \Theta = 0.$$

sarà noto il valore della derivata normale. Può quindi ritenersi conosciuta la  $u$  stessa nel punto  $x_1 y_1 z_1$ . La ricerca di  $w$  dipende da un problema del tutto analogo. La ricerca di  $v$ , della quale è noto il  $\Delta_2$ , dipende da un problema più semplice essendo noti i suoi valori sopra  $\sigma_1$  e  $\sigma_2$ . Gli spostamenti all'infinito si suppongono nulli.

Le formole che si ottengono sono abbastanza semplici; ma non è qui il caso di svilupparle completamente.

5. Supponiamo invece che sui due piani limiti siano conosciute la componente normale dello spostamento e le componenti tangenziali delle forze; cioè siano note:

$$\begin{array}{lll} \text{per } x=0 & \text{le} & u, \quad M, \quad N; \\ \text{per } z=0 & \text{le} & L, \quad M, \quad w. \end{array}$$

Dovremo determinare una deformazione ausiliaria di componenti  $\xi, \eta, \zeta$  tale che al contorno sieno soddisfatte le condizioni:

$$\begin{array}{l} x=0, \quad \xi = -\frac{\partial}{\partial x} \frac{1}{r}, \quad M'_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial y} \frac{1}{r}, \quad N'_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r}; \\ z=0, \quad L''_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial x \partial z} \frac{1}{r}, \quad M''_0 = 2k\omega^2 \frac{\partial^2}{\partial y \partial z} \frac{1}{r}, \quad \zeta = -\frac{\partial}{\partial z} \frac{1}{r}. \end{array}$$

A queste agevolmente si sostituiscono le altre equivalenti:

$$\begin{aligned} x=0, \quad \xi &= -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial x}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial y}, \quad \frac{\partial \zeta}{\partial x} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}; \\ z=0, \quad \frac{\partial \xi}{\partial z} &= -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial x \partial z}, \quad \frac{\partial \eta}{\partial z} = -\frac{\partial^2 \frac{1}{r}}{\partial y \partial z}, \quad \zeta = -\frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z}. \end{aligned}$$

Decomponiamo la deformazione  $\xi, \eta, \zeta$  in altre due  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  e  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  e le  $\xi_1, \eta_1, \zeta_1$  siano armoniche in S e al contorno soddisfino alle condizioni precedenti; mentre le  $\xi_2, \eta_2, \zeta_2$  soddisfino alle equazioni indefinite di equilibrio e siano nulle al contorno. Nè per la ricerca della prima deformazione occorre seguire il metodo generale del § 1; perchè un facile calcolo mostra che si può prendere:

$$\xi_1 = -\frac{\partial G'}{\partial x}; \quad \eta_1 = -\frac{\partial G'}{\partial y}; \quad \zeta_1 = -\frac{\partial G'}{\partial z}$$

Questa deformazione è quindi priva di dilatazione e di rotazione e allora si vede subito che alle equazioni ulteriori può soddisfarsi ponendo  $\xi_2 = \eta_2 = \zeta_2 = 0$ : ond'è:

$$\xi = -\frac{\partial G'}{\partial x}; \quad \eta = -\frac{\partial G'}{\partial y}; \quad \zeta = -\frac{\partial G'}{\partial z}.$$

Dopo ciò la risoluzione del problema non presenta più alcuna difficoltà.

Lo stesso può dirsi per gli altri casi considerati dal prof. Somigliana. Con pari facilità si possono trattare problemi analoghi relativi alla deformazione di un triedro retto isotropo.

**Fisica.** — *Sul contegno dell'idrogeno e dell'ossigeno in presenza dell'acqua.* Nota preventiva di A. MARCACCI, presentata dal Socio LUCIANI.

Al congresso internazionale di Fisiologia di Torino (settembre 1901) feci conoscere alcuni risultati da me ottenuti studiando il modo di comportarsi di certi gas (azoto e idrogeno) quando sieno lasciati a lungo nell'acqua, sia soli e allo stato di purezza, sia mescolati a dell'ossigeno. Ecco le conclusioni alle quali giungevo dopo tale studio.

I. Se, a periodi regolari, si esamina l'idrogeno stagnante sull'acqua comune sotto una campana, vi si trova, nei primi giorni, dell'ossigeno in piccola quantità: questo gas sparisce però dopo un certo tempo, e non riappa-



risce più finchè vi è idrogeno sotto la campana. In questo tempo dunque, come si crede generalmente dai fisici, non è penetrata aria nella campana.

II. a) Se invece d'idrogeno puro si mette sotto la campana una mescolanza di idrogeno e di ossigeno, questi gas spariscono dopo un certo tempo: resta un gas, in piccola quantità, che è certamente dell'azoto.

b) È allora, dopo questo primo periodo, che l'ossigeno riappare, aumenta lentamente, e raggiunge la proporzione del 15 al 20 %. Ma questa mescolanza s'è formata a spese dei gas disciolti nell'acqua, e che ne sono usciti in momenti differenti, e non già a spese dell'aria in natura, che sarebbe penetrata, come tale, dal di fuori.

III. Si può ottenere naturalmente quest'ultimo risultato (realizzando direttamente la fase a), se, invece d'una mescolanza d'idrogeno e di ossigeno, si mette sotto la campana, fin dal principio dell'azoto puro: finisce col formarsi un'atmosfera che ha la composizione dell'aria.

Queste erano le conclusioni generali alle quali venivo nella comunicazione fatta a Torino: aggiungevo che molte circostanze possono far variare la fisionomia dei fenomeni, soprattutto rispetto all'idrogeno: citavo, ad es., una soluzione satura di  $\text{Cl Na}$ , messa al posto dell'acqua comune: in questo caso nè l'idrogeno puro, nè un miscuglio detonante che vi riposino sopra, anche per lunghissimo tempo, cambiano sensibilmente nella loro fisionomia.

Quanto alla spiegazione dicevo testualmente così: « Per il momento io mi credo autorizzato ad emettere l'ipotesi che l'idrogeno, in presenza dell'acqua ordinaria, possa combinarsi coll'ossigeno: il fenomeno non avrebbe luogo nell'acqua alterata in qualsiasi modo. Questi fatti ci obbligano a modificare le nostre idee sulla diffusione di certi gas: il fenomeno non è solamente d'ordine fisico, ma anche d'ordine chimico ».

Dopo questa comunicazione continuai, com'è naturale, i miei studi sui gas che rimangono a lungo nell'acqua: ma rivolsi più specialmente i miei sforzi a verificare l'ipotesi annunziata, se cioè la combinazione dell'idrogeno e dell'ossigeno avvenisse in seno all'acqua: credo oggi di essere autorizzato, dall'evidenza dei fatti raccolti, ad annunziare che questa ipotesi è pienamente confermata.

Se, io pensai, l'idrogeno, sciogliendosi nell'acqua, si combina con l'ossigeno di questa, collocando e mantenendo a lungo sull'acqua un'atmosfera di idrogeno, deve venire un momento nel quale l'acqua stessa non deve contenere più ossigeno: e ciò si potrà verificare estraendo ed analizzando i gas di quest'acqua.

Estrassi ed analizzai, per le prime, due acque; una delle quali era rimasta per più di un anno in rapporto con un'atmosfera di idrogeno, e l'altra, un egual tempo e nelle identiche condizioni, con una di azoto: quest'ultima, come ho già detto, era stata inquinata da ossigeno (20 %): l'idrogeno ne era privo da parecchi mesi. Analizzati i gas estratti dalle due acque trovai:

nell'acqua all'idrogeno cc. 0,8 di ossigeno per litro d'acqua, e cc. 4,3 dello stesso gas, per litro d'acqua sull'azoto.

L'impovertimento in ossigeno dell'acqua all'idrogeno era più che evidente: riscontrai il fatto anche in altre acque sottoposte ad un'atmosfera di idrogeno: tracce di ossigeno però le trovai sempre. Perchè, in sì lungo tempo, nell'esperimento citato, tutto l'ossigeno non era scomparso? Ciò poteva derivare da due fatti: o dalla continua rifornimento in ossigeno che l'acqua delle campane poteva ricevere dall'acqua esterna dei bacili in cui quelle eran rovesciate, e che era in contatto coll'aria; o dal fatto che gli strati superiori della colonna d'acqua delle campane, pur essendo privi di ossigeno, ne venissero a ricevere, durante la forte aspirazione della campana a vuoto, dagli strati inferiori che ne possedevano. La presa infatti veniva praticata a 5-6 cm. dalla superficie dell'acqua, che si sollevava in colonna per 12 a 14 cm. sul livello dell'acqua dei bacili.

Pensai allora di ricorrere all'esame dell'acqua di un gazometro di vetro, a perfetta tenuta, nel quale era raccolto, da molto tempo, dell'idrogeno: qui la rifornimento di ossigeno non era possibile: ebbene, *in quest'acqua trovai appena tracce di ossigeno.*

Incoraggiato da questi risultati, feci un esperimento che mi doveva dare (se l'ipotesi, come tutto faceva sperare, era vera), un risultato definitivo. In un lungo cilindro, ripieno prima d'acqua comune e rovesciato sul mercurio, misi dell'idrogeno: in queste condizioni, come nel gazometro, la colonna d'acqua era separata completamente dall'aria esterna. Quando, coll'analisi dell'idrogeno, potei verificare la sparizione completa di quelle piccole tracce d'ossigeno che vi soglion penetrare in principio, e la cessazione della diminuzione di volume dell'atmosfera gassosa, estraissi ed analizzai i gas di tutta la colonna d'acqua che aveva subita l'azione dell'idrogeno: vi trovai, come sempre, dell'azoto e dell'idrogeno, *ma non vi era più traccia di ossigeno.*

Inutile aggiungere che in tutte queste ricerche (oltre le precauzioni necessarie perchè le acque da analizzarsi non venissero mai in contatto coll'aria), furono praticate sempre delle analisi gazometriche in campane di quella stessa acqua che era stata sottoposta all'azione dell'idrogeno; ebbene queste analisi, com'era da aspettarsi, dettero sempre il 30 o il 31 % di ossigeno, e il 6,5-7 per litro di questo gas: ciò che collima coi dati fornitici dal Bunsen.

La mia ipotesi poteva dunque dirsi completamente confermata: ed è a questo solo che limito, per oggi, la mia comunicazione. Nel resoconto completo che, lo spero, potrò dar presto alla stampa, dirò delle molte e svariate circostanze che possono modificare o ammettere il fenomeno da me trovato, e delle conseguenze che può portare sul modo di considerare la solubilità e la diffusione dei gas, e più specialmente dell'idrogeno, nell'acqua.

**Fisica.** — *Sulla influenza dell'elettrizzazione sulla velocità di evaporazione.* Nota di A. POCHETTINO, presentata dal Socio BLASERNA.

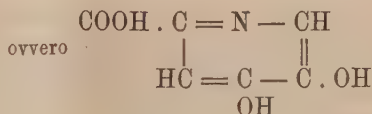
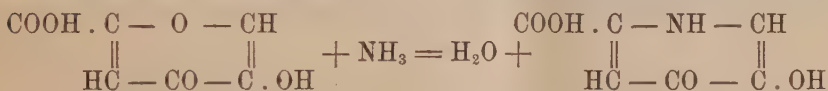
Questa Nota sarà pubblicata nel prossimo fascicolo.

**Chimica.** — *Sulla trasformazione di derivati dell'acido meconico in ossipiridine.* Nota di A. PERATONER, presentata dal Socio E. PATERNO.

Nei suoi lavori interessantissimi Ost <sup>(1)</sup> dimostrò che i derivati dell'acido meconico, contenenti il nucleo del  $\gamma$ -pirone, possono essere trasformati in composti piridici seguendo due vie diverse. La prima è data dall'azione dell'ammoniaca, una reazione che secondo Lieben ed Haitinger <sup>(2)</sup> e v. Pechmann <sup>(3)</sup> si interpreta ammettendo che l'atomo di ossigeno dell'anello pironico venga sostituito dal gruppo imidico generandosi  $\gamma$ -piridoni, i quali, come è noto, presentano il fenomeno della tautomeria. P. es.

Ac. comenico <sup>(4)</sup> = ossipironcarbonico

Ac. comenaminico = ossipiridoncarbonico



Il secondo modo in cui avviene la trasformazione, fin oggi non è stato chiarito. Ost partendo dal nitrosocomposto doppio, giallo dell'acido piromeconico, indicato da lui come acido nitroso-dipiromeconico  $\text{C}_5\text{H}_3\text{O}_3 \cdot \text{NO} + \text{C}_5\text{H}_4\text{O}_3$ , e riducendolo con acido solforoso, ebbe un prodotto contenente 2 atomi di idrogeno in più, che aveva la composizione di una tetrossipiridina  $\text{C}_5\text{H}_5\text{NO}_4$  e venne chiamato acido *ossipirimecazonico*. Questo per ulteriore riduzione

<sup>(1)</sup> Journal f. prakt. Chemie 19, 177; 27, 257; 29, 57.

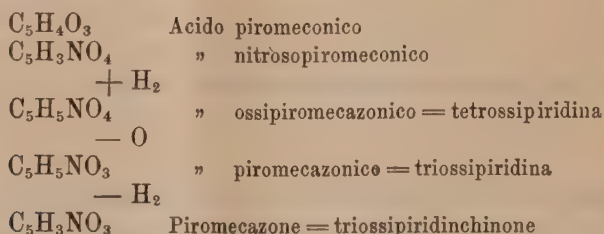
<sup>(2)</sup> Monatshefte 5, 363; 6, 307.

<sup>(3)</sup> Pechmann u. Baltzer. Berichte 24, 3151.

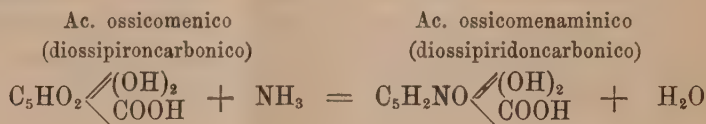
<sup>(4)</sup> Per la costituzione dell'acido comenico confr. la Memoria di Peratoner e Leonardi. Gazz. Chim. 30, I, 539.



con acido jodidrico cedendo un atomo di ossigeno forniva la sostanza  $C_5H_5NO_3$ , detta acido *piromecazonico* o triossipiridina, la quale finalmente all'ossidazione perdeva 2 atomi di idrogeno trasformandosi nel chinone rosso, il *piromecazone*  $C_5H_3NO_3$ .



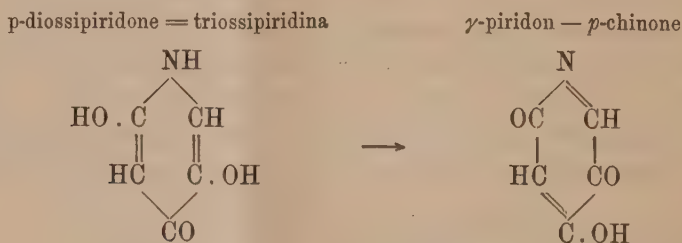
Fra queste sostanze l'acido piromecazonico o triossipiridina di Ost è indubbiamente un piridone sostituito, dapoichè può anche prepararsi per la prima via sopraindicata partendo dall'acido comenico (ossipironcarbonico). Infatti, trasformando questo in ossiderivato (diossi-pironcarbonico) e facendo poi reagire l'ammoniaca si ricava un acido, il cui nucleo deve essere piridonico



e da cui per eliminazione del carbossile si giunge all'identico acido piromecazonico o triossipiridina di Ost



Siccome questo corpo si comporta come l'idrochinone (reazione azzurra col cloruro ferrico; formazione di chinone), Ost lo considerò « senza alcun dubbio come costituito analogamente alle sostanze aromatiche parasostituite ». Pechmann <sup>(1)</sup> gli attribuì la seguente formula, che è anche riportata nei manuali più recenti <sup>(2)</sup>:

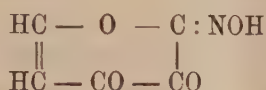


<sup>(1)</sup> Stokes e Pechmann. Berichte 19, 2710.

<sup>(2)</sup> P. es. Roscoe-Schorlemmer's Lehrbuch von Brühl, Hjelt, Aschan. VII Band, 5 Theil, p. 163.

Quanto all'acido ossi-piromecazonico, da cui il composto precedente si forma per riduzione, sembrò dubbio ad Ost se fosse tetrossipiridina. Egli fu inoltre del parere che « dovesse decidersi ancora la quistione, se l'acido « nitrosopiromeconico, da cui questa tetrossipiridina prende origine, fosse « veramente un nitroso-composto, non potendosi comprendere in qual modo « ne risultasse un corpo con l'azoto così saldamente legato come la triossi-  
« piridina » (1).

Come ho dimostrato in una Nota precedente (2), l'acido nitrosopiromeconico è però un isonitroso-derivato della forma tautomera chetonica dell'ossipirone cui compete la formula :

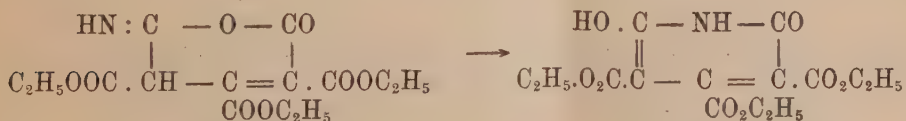


Partendo da questa costituzione nota e considerando, come dianzi ho detto, che è indubbiamente un piridone l'acido piromecazonico, cui si giunge, non è difficile avere una spiegazione attendibile del modo come avviene la formazione dei composti piridici cennati; dapoichè il problema si riduce alla studio della genesi e della costituzione del prodotto intermedio, l'acido ossi-piromecazonico o tetrossipiridina di Ost.

Dalla superiore formula si rileva che nell'isonitroso-ossipirone il gruppo ossimidico è legato ad un atomo di carbonio, il quale resta unito inoltre all'ossigeno dell'anello pironico. Ammettendo che avvenga fra questi gruppi una trasposizione, quello ossimidico potrà entrare nel nucleo, mentre l'ossigeno diventerà carbonilico.

Supporre un tale cambiamento di posto, e la conseguente trasformazione di un anello pironico in piridico, non ha nulla di arbitrario essendosi constatati casi del tutto analoghi che dal presente vengono ad essere confortati.

Infatti recentemente Errera (3) dalle sue ricerche sintetiche sulle ossipiridine è condotto a ritenere che un derivato azotato della cumalina ( $\alpha$ -pirone), da lui preparato, debba considerarsi come *isoimide*; la quale pel solo riscaldamento si muta in composto ossipiridico :



(1) Journ. f. prakt. Chemie 27, 273; 29, 67.

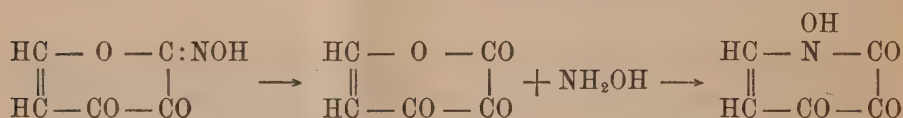
(2) Questi Rendiconti della seduta del 16 marzo 1902.

(3) Gazz. Chim. 32, 1; Berichte 34, 3700. Errera e Perciabosco. Gazz. Chim. 32, 9.

L'autore, tenendo presenti i lavori di Hoogewerff e van Dorp <sup>(1)</sup> sulle isoimidi, dimostra le ragioni di questa interpretazione e viene altresì alla conclusione che le varie sostanze azotate, preparate da Guthzeit <sup>(2)</sup> per azione di ammoniaca ed ammine sull'etere etossicumalindicarbonico, anche esse sono isoimidi dell' $\alpha$ -pirone, piuttosto che imidi. Per opera del calore si trasformano in piridoni; e per quanto forse questa isomerizzazione rappresenti un fenomeno complesso, pure il risultato finale andrebbe espresso p. es. dallo schema:



La trasposizione molecolare che io ammetto subisca l'isonitroso-ossi- $\gamma$ -pirone corrisponde a quelle precedenti. È probabile che essa sia preceduta da addizione degli elementi dell'acqua, essendochè avviene già per sola ebollizione con acqua o con alcool; ma procedendo nel modo più blando, quando vi agisce l'acido solforoso, si può immaginare pure che si formi, per scissione, idrossilamina, la quale allo stato nascente reagirebbe con l'atomo di ossigeno del nucleo precisamente come l'ammoniaca fa con molti derivati del  $\gamma$ -pirone.



Nel primo stadio della reazione dovrebbe quindi risultare un 1.2.3 — trichetone azotato. Come tale dovrà forse considerarsi l'isomero dell'acido nitrosopiromeconico che, secondo Ost, si forma da quest'ultimo, quando viene conservato secco in vaso chiuso <sup>(3)</sup>.

In presenza d'acqua però la reazione va più oltre. Il trichetone addiziona subito una molecola di idrogeno, ciò che riesce nel modo più facile in presenza dell'acido solforoso riducente, per trasformarsi in un triossi-piridone stabile contenente azoto ossimidico, mentre fra i due atomi di carbonio si stabilisce legame doppio.



(1) Recueil d. Pays-Bas 11, 84; 12, 12; 13, 93; 14, 252.

(2) Berichte 26, 2795. Annalen 285, 35.

(3) Journ. f. prakt. Chemie 27, 272, nota 2 a piè di pagina.



Questo modo di considerare l'acido ossipiromecazonico (tetrossipiridina) come composto ossimidico con l'azoto nel nucleo, corrisponde perfettamente al suo comportamento chimico. Per ebollizione con anidride acetica ho potuto ricavarne un derivato *triacetilico* dal p. f. 123-124°, con cloruro di benzoile un etere *tribenzoilico*, p. f. 162-163°, prodotti che facilmente vengono saponificati dall'alcool bollente ridando il composto primitivo.

Che dei tre ossidrili uno si comporta in modo essenzialmente diverso dagli altri due, resta provato dalla riduzione fatta da Ost (con HI oppure  $\text{Sn} + \text{HCl}$ ), nella quale un solo atomo di ossigeno (quello legato all'azoto) viene eliminato con somma facilità, laddove gli ossidrili legati agli atomi di carbonio resistono anche a riduzioni ulteriori (1). Il prodotto finale è sempre l'acido piromecazonico (triossipiridina di Ost).

Che del resto l'acido ossi-piromecazonico è già un derivato della piridina, risulta chiaramente « dal suo carattere chimico che coincide in tutto con quello dell'acido piromecazonico », eccettuata naturalmente la facile riducibilità del primo. Da entrambi l'azoto non può eliminarsi per scissione, entrambi colorano in azzurro-violetto il cloruro ferrico e forniscono con cloruro di bario ed ammoniaca il precipitato caratteristico azzurro-fior d'aliso.

Un ulteriore riconferma del mio modo di rappresentare l'acido ossi-piromecazonico come piridone con ossidrile legato all'azoto del nucleo, la si ricava dalla esistenza e dal comportamento di pochi composti analoghi finora noti. Ost ne ebbe fra le mani qualcuno senza deciderne la costituzione (2). Infatti, per l'azione dell'idrossilamina sull'acido comanico (pironcarbonico) preparò una sostanza che ora dobbiamo considerare come acido *N ossi-piridoncarbonico*



e da questa, per eliminazione del carbossile, un corpo che deve ritenersi *N ossi-piridone*. Queste sostanze, come Ost stesso constatò, si comportano alla riduzione precisamente come l'acido ossipiromecazonico, cedendo con facilità un solo atomo d'ossigeno, epperò dovranno avere quest'atomo legato all'azoto.

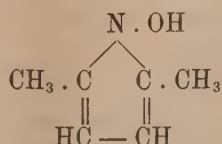


(1) Loco cit. p. 258, 270.

(2) Journ. f. prakt. Chemie 29, 378.

Ho ripreso lo studio dell'azione dell'idrossilamina sopra alcuni composti  $\gamma$ -pironici e posso comunicare intanto, che mentre l'acido comenico (ossipironcarbonico), come è noto, rimane inalterato, il suo etere dietilico fornisce un derivato ossimidico, il cui azoto con somma probabilità trovasi nel nucleo. Colora in rosso, fino rosso-bruno, il percloruro di ferro, reazione cromatica questa che ritengo comune appunto a quei composti ciclici, del cui anello fa parte un atomo di azoto ossimidico.

Infatti ho potuto constatarla per l'ossipirrolo di Knorr (1) ed alcuni suoi derivati,

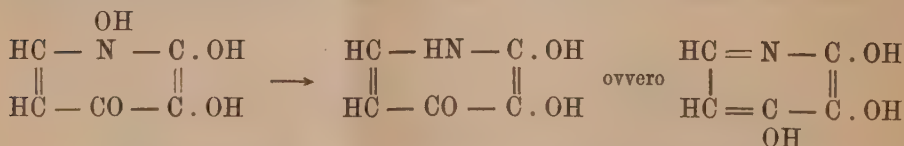


che tirerò pure nel campo delle mie ricerche, e per lo stesso acido ossipiro-mecazonico.

Facendo con questo il saggio in piccolo, non si ha altro che la nota colorazione azzurra; ma adoperando eccesso di soluzione satura e facendovi cadere a gocce il cloruro ferrico, comparisce dapprima il bel colorito rosso e quindi si precipita un sale rosso, che soltanto con eccesso del reattivo si ridiscioglie cambiandosi il colore in azzurro. L'analisi del sale porta alla formula  $\text{Fe}(\text{C}_5\text{H}_4\text{O}_4\text{N})_3$ . Se ne deduce che anche di fronte al cloruro ferrico uno dei tre ossidrili dell'acido ossipiro-mecazonico ha un comportamento particolare, e che quest'ossidrile dovrà essere quello ossimidico.

In quanto all'acido piromecazonico o triossipiridina di Ost, che dal composto precedente si ottiene per eliminazione dell'ossigeno ossimidico mediante la riduzione, la formula di costituzione assegnatagli da von Pechmann deve modificarsi in modo, che i due ossidrili rimanenti si trovino fra loro in posizione *orto*, considerandosi per conseguenza questo corpo come  $\alpha\beta$ -diossi —  $\gamma$ -piridone.

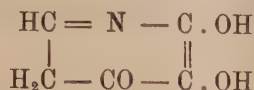
Tuttavia è dubbio che la cennata riduzione proceda nel modo semplice, espresso dallo schema:



Queste due formule tautomere dell'acido piromecazonico richiederebbero la possibilità di ricavarne un derivato triacetilico, mentre Ost non riuscì a

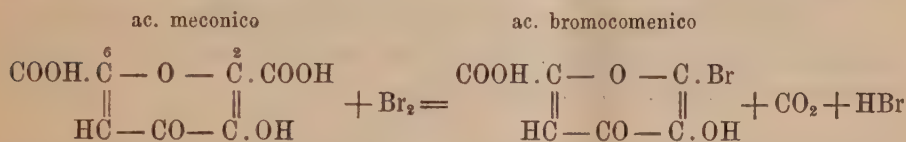
(1) Annalen der Chemie 236, 300.

preparare che il diacetilico, sebbene spingesse l'azione dell'anidride acetica sino a 220°. Di questo fatto, e di tutte le altre reazioni della triossipiridina darebbe ragione una formula di costituzione, dalla quale si rilevi uno spostamento dell'atomo di idrogeno imidico, come :

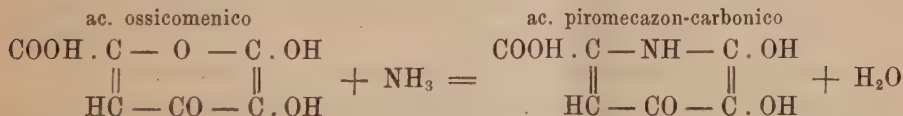


e che, pur essendo più verosimile delle altre, per ora dò con riserva.

La posizione  $\alpha\beta$  degli ossidrili può d'altronde essere dimostrata mediante la genesi di questo composto dall'acido comenico che ho ricordato in principio di questa nota. L'acido comenico fornisce un bromoderivato, identico a quello che si ottiene dall'acido meconico per sostituzione del bromo al carbossile in posizione 2, come ho discusso in un lavoro precedente (1).

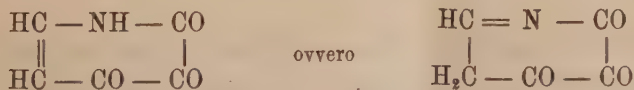


Questo prodotto alogenato scambia poi, per azione dell'acqua, il bromo con ossidrile dando l'acido ossicomenico ; sul quale agendo l'ammoniaca, si forma il composto piridonico corrispondente, che è il derivato carbossilico dell'acido piromecazonico.



Epperò nel composto che se ne ricava per eliminazione di anidride carbonica, gli ossidrili devono occupare pure le posizioni sopraindicate.

Finalmente il chinone rosso, che dall'acido piromecazonico si ottiene per ossidazione, detto *piromecazone*, dovrà essere un *orto*chinone e contemporaneamente 1.2.3- trichetone. A quale delle due formule più probabili



sia da darsi la preferenza, spero potere decidere mediante nuove esperienze che ho iniziato sopra i varii prodotti accennati in questa Nota.

(1) Peratoner e Leonardi. Gazz. chim. 30, I, 562.



**Geologia.** — *I terreni nummulitici di Spalato in Dalmazia.*

Nota del dott. ALESSANDRO MARTELLI, presentata dal Corrispondente DE STEFANI.

Ad oriente dell'antica Salona e, in modo più preciso, alle falde delle alture cretacee di Clissa, ha principio la formazione eocenica, che di là si distende fino a costituire tutta la costa spalatina.

I terrenici eoceni della Dalmazia sono poco noti e della ricchissima fauna nummulitica dei dintorni di Spalato nemmeno si fa cenno; perciò ne ho intrapresa la illustrazione giovandomi degli abbondanti materiali raccolti sul posto dal prof. De Stefani e da me.

A Salona il calcare nummulitico poggia direttamente e in concordanza sulla Creta superiore e presenta, oltre un numero non trascurabile di piccole *Orbitoïdes*, esemplari delle seguenti specie:

(r) <i>Nummulites Guettardi</i> d'Arch. et H.	(c) <i>Nummulites perforata</i> d' Orb.
(r) " <i>striata</i> d'Orb. var.	var. <i>Renevieri</i> de
<i>minor</i> d'Arch. et H.	la Harp.
(c) " <i>variolaria</i> Sow.	(c) " <i>perforata</i> d' Orb. var.
(r) " <i>Heberti</i> d'Arch. et H.	<i>granulata</i> Tell.
(r) " <i>Heeri</i> de la Harp.	(c) <i>Assilina mamillata</i> d'Arch. et
(c) " <i>Lucasana</i> Defr. var.	H. var. <i>plicata</i> de
<i>obsoleta</i> de la Harp.	la Harp.
(c) " <i>Lucasana</i> Defr. var.	(c) " <i>exponens</i> Sow. var. <i>pli-</i>
<i>depressa</i> d' Arch.	<i>cata</i> de la Harp.
et H.	(c) " <i>exponens</i> Sow. var. <i>gra-</i>
(c) " <i>Lucasana</i> Defr. var.	<i>nulosa</i> d'Arch.
<i>granulata</i> de la	(r) <i>Operculina subthouini</i> Tell.
Harp.	(r) " <i>Thouini</i> d'Orb.
(c) " <i>perforata</i> d' Orb.	(r) " <i>ammonea</i> Leym.
var. <i>obesa</i> Leym.	

Tenendo presente che a Salona le nummuliti granulate sono assai bene rappresentate, mentre in modo assoluto vi mancano le *Alveoline* e vi difettano le forme più grandi delle nummuliti non granulose a filetti settali semplici, si viene ad escludere tanto il livello più basso dell'Eocene medio quanto il più alto, e a riferire i terreni di Salona alla parte media di detto Eocene medio.

Sovrastante al calcare nummulitico ora considerato, dirigendosi verso Spalato, si osservano situati in largo sinclinale tra Salona e Monte Marian, strati quasi orizzontali di marne ad *Helmintoida* alternate con arenarie, e, fra di essi, una brecciola che viene poi a differenziarsi in un vero e proprio calcare screziato, allorchè i materiali che lo costituiscono divengono più uniti e più intimamente fra loro cementati. Il passaggio dalla parte media a quella superiore dell' Eocene medio, si può osservare a Spalato, dove si ha un calcare marnoso col seguente aggregato di nummuliti, oltre alla comunanza di quelle forme già citate nel calcare di Salona.

(r) <i>Nummulites Tchihatcheffi</i> d'Arch.	(c) <i>Nummulites Lucasana</i> Deffr. (tipo)
et H.	(c) " <i>perforata</i> d'Orb. var.
(r) " <i>complanata</i> Lamk.	" <i>aturensis</i> d'Arch.
(r) " <i>latispira</i> Savi e Menegh.	et H.
(c) " <i>subitalica</i> Tell.	
(r) " <i>distans</i> Desh.	(c) " <i>italica</i> Tell.
(c) " <i>Guettardi</i> d'Arch.	(c) <i>Assilina</i> sp.
et H.	(c) <i>Orbitoides</i> sp.
(c) " <i>biarritzensis</i> d'Arch.	

Dove la formazione eocenica mostra tutta la sua potenza e raggiunge il suo massimo è nel Monte Marian, che, a guisa di promontorio segna l'estremità nord-occidentale della zona da noi studiata. Esso è originato da una piega parallela al litorale ed è per metà eroso dal mare; presenta una successione di strati i quali, specialmente nel fianco occidentale e meridionale, si arrestano a picco con le loro testate ed hanno un'inclinazione costante a nord-est di 35°-40°.

Il calcare che lo costruisce risulta di un impasto di grosse foraminifere, di briozoi, coralli, echini, piccoli lamellibranchi ed altri fossili, i quali spesso si rivelano sulle superfici corrose della roccia. In tale calcare abbiamo notato come le forme del gruppo della *Nummulites distans* (*N. Tchihatcheffi* — *N. complanata*, *N. latispira* — *N. distans* ecc.) si mostrino in numero abbondante e pari a quello delle già citate varietà della coppia *N. Lucasana* — *N. perforata*, e come non difettino neppure i rappresentanti delle seguenti specie:

Foraminifere:

<i>Nummulites subdiscorbina</i> de la Harp.	<i>Nummulites contorta</i> Desh. var. <i>Viquesnelii</i> d'Arch. et H.
" <i>discorbina</i> Schloth.	" <i>curvispira</i> Menegh.
" <i>discorbina</i> Schloth. var. <i>La Harpei</i> Martel.	" <i>Gizehensis</i> Ehr.
" <i>striata</i> d'Orb.	" <i>Gizehensis</i> Ehr. var. <i>Ehrenbergii</i> de la Harp.
" <i>contorta</i> Desh.	

<i>Nummulites Gizehensis</i> Ehr. var. <i>Lyelli</i> d'Arch et H.	Coralli: <i>Columnastraea</i> <i>Caillaudi</i> Mich.
" <i>Lucasana</i> Defr. var. <i>Megneginii</i> d'Arch. et H.	<i>Caryophyllia</i> sp.
" <i>perforata</i> d'Orb. var. <i>Stefanii</i> Martel.	Echini: <i>Echinolampas</i> <i>Suessi</i> Laub.
" <i>subitalica</i> Tell.	<i>Echinolampas</i> sp.
" <i>italica</i> Tell.	<i>Conoclypus conoideus</i> Lamk.
" <i>Guetardi</i> d'Arch. et H.	<i>Conoclypus anachoreta</i> Agas.
" <i>biarritzensis</i> d'Arch.	<i>Conoclypus</i> sp.
" <i>variolaria</i> Sow.	Lamellibranchi: <i>Pecten</i> <i>Bonarelli</i> Vin.
" <i>Heberti</i> d'Arch. et H.	<i>Pecten</i> sp.
<i>Assilina</i> sp.	<i>Murex</i> sp.
<i>Orbitoides</i> sp.	Vermi: <i>Serpula</i> ( <i>Rotularia</i> ) <i>spirulaea</i> Lamk.
Briozoi: <i>Retepora</i> sp.	Nulliporidee: <i>Lithothamnium nummuliticum</i> Gumb.
<i>Cellepora</i> sp.	

Le località delle Botticelle e di Santo Stefano, le quali tanto ad oriente che ad occidente delimitano il porto di Spalato venendo a formare le due punte più sporgenti di questo tratto di costa, sono le più fossilifere, ma la roccia che le costituisce risulta di fossili già ruzzolati e rimaneggiati, spesso in frantumi, e di detriti di calcari più antichi, perfino di *Rudistae*. E così anche la brecciola che vi si trova alla base insieme con sottili lenti di argille turchinicie, come risultato della denudazione atmosferica e marina è ridotta ad un impasto incoerente di minuti frammenti di roccia e di fossili diversissimi.

Tutte le specie fossili citate a proposito dei terreni di Salona, Spalato e Monte Marian, vi si ritrovano pure, ma mescolate con altre molte, comuni all'Eocene medio, che altrove si osservano in gruppi ben distinti a caratterizzare livelli costanti. Dei fossili raccolti alle Botticelle e a Santo Stefano e non ancora menzionati, riportiamo qui la nota per meglio far conoscere la fauna eocenica dei dintorni di Spalato, sebbene non trattandosi di fossili visuti tutti insieme, le determinazioni dell'orizzonte abbiano valore alquanto minore. Oltre a tutte le forme di nummulitidi, di corallari, echini, lamellibranchi ecc. che già abbiamo avuto occasione di enumerare nel calcare marnoso di Spalato e in quello del Monte Marian, abbiamo dunque pure raccolto alle Botticelle e a Santo Stefano, rappresentanti delle seguenti specie:

#### Nummulitidi:

<i>Nummulites anomala</i> de la Harp.	<i>Nummulites suboenotria</i> Martel.
" <i>Montis-Fracti</i> Kaufm.	" <i>oenotria</i> Tell.



<i>Orbitoides dispansa</i> A Martel.	<i>Orbitoides dalmatina</i> B' Mart.
" <i>dispansa</i> (B) Sow.	" <i>stella</i> Gumb.
" <i>aspera</i> A Mart.	" <i>stellata</i> d'Arch. et H.
" <i>aspera</i> (B) Gumb.	Echini: <i>Cidarid</i> sp.
" <i>papyracea</i> (A) Boub.	<i>Cyphosoma cribrum</i> Agas.
" <i>papyracea</i> (B) Boub.	Brachiuri; <i>Ranina Marestiana</i> Kön.
" <i>papyracea</i> (B) Boub. var.	Nulliporidee: <i>Lithothamnium toru-</i>
<i>Fortisi</i> d'Arch.	<i>losum</i> Gumb.
" <i>applanata</i> Gumb.	<i>Lithothamnium effu-</i>
" <i>ephyppium</i> Schloth.	<i>sum</i> Gumb.
" <i>dalmatina</i> A Mart.	

Nei terreni di Spalato ho dunque creduto di riconoscere tre principali livelli ben distinti paleontologicamente a Salona (Eocene medio parte media) a Spalato (piano di transizione) e al Monte Marian (Eocene medio parte superiore), basando principalmente la distinzione sui rapporti di aggruppamento delle nummuliti granulose, in posto, con quelle liscie riferibili al gruppo della *N. distans*. Ricordiamo che, nella scala delle nummuliti redatta dal de la Harpe (<sup>1</sup>), le forme granulose costituiscono la terza zona, le *Assiline* la quarta, le nummuliti striate la quinta e quelle liscie la sesta. Orbene, considerando che, eccezione fatta per il piano più basso dei terreni eocenici spalatini, i rappresentanti della sesta zona — mentre vengono a prender parte insieme con un proporzionale numero di quelli della quinta e della quarta ad una fauna nummulitica che viene qui caratterizzata da forme in prevalenza granulose — sono mancanti a Salona, scarsi a Spalato e abbondanti al Monte Marian, si comprende come sia naturale la distinzione, paleontologica oltre che stratigrafica, in tre zone.

Anche nel Veneto, alla Maiella e al Gargano, per citare solo località ben note, le nummuliti si trovano associate in modo quasi identico a quello che si verifica nei terreni di Spalato.

La coppia *N. Lucasana* — *N. perforata* considerata come caratteristica del Parisiano medio — facendo il Parisiano corrispondente all'intero Eocene medio — è al Monte Marian del pari abbondante come la coppia *N. Tchi-hatcteffi* — *N. complanata*, la quale in tutto il perimetro del Mediterraneo sta a rappresentare un orizzonte alquanto più alto. A togliere infine il dubbio che il Monte Marian non sia costituito da terreni eocenici meno antichi dei circostanti, basta il fatto che le nummulitidi da noi determinate vengono a prender parte ad una fauna, che, dall'enumerazione degli altri pochi fossili più sopra citati, risulta pure sincrona a quella di San Giovanni Ilarione e quindi con ogni probabilità, riferibile all'Eocene medio parte superiore.

(<sup>1</sup>) De la Harpe Ph., *Étude des Nummulites de la Suisse*, Mémoires de la Société Paléontologique Suisse, vol. VII, pag. 76.

Biologia. — *Nuove ricerche sullo sviluppo delle ampolle di Lorenzini*. Nota II di ALESSANDRO COGGI, presentata dal Socio EMERY.

*Nervi ampollari*. — Ho rilevato nella Nota I portante lo stesso titolo <sup>(1)</sup> che nello stadio di ampolla individualizzata il nervo forma una sorta di clava sotto e di fianco all'ampolla, pel fatto che parecchi nuclei ivi si sono accumulati. Questi appartengono ad elementi nervosi embrionali la cui migrazione in direzione centrifuga dai rami nervosi che contengono anche i nervi di senso laterale, a me sembra evidente. Ma è anche indubitato che questi elementi vanno ivi soggetti ad attiva moltiplicazione, il cui risultato è la formazione di una espansione o dilatazione di forma ovale o conica, sulla quale sembra che l'ampolla sia in parte adagiata. Ho osservato siffatta espansione, più o meno sviluppata, oltre che in *Torpedo*, in *Pristiurus*, *Mustelus* e *Raja*.

Forse per una certa somiglianza che questa espansione offre con la placca terminale del *R. lateralis vagi* in via di sviluppo, riscontrata nei Pesci e negli Anfibî da varî autori (Clapp, Raffaele e altri), Dohrn <sup>(2)</sup> che l'ha osservata in embrioni di *Pristiurus* e *Scyllium*, la chiama « Basalzellplatte » del nervo ampollare, « Bodenplatte » dell'ampolla. E *pour cause*. Poichè nello stesso modo che la espansione terminale del nervo laterale è dovuta alla migrazione in essa di elementi ectodermici formatisi per moltiplicazione nell'abbozzo della linea laterale, così Dohrn ritiene che sia prodotta la « Basalplatte » delle ampolle dalla parete di esse. Anzi egli si fonda esclusivamente su questa asserita migrazione di elementi cellulari dal fondo dell'ampolla nella « Basalplatte », e i quali, secondo ammette egli stesso, ivi si moltiplicano, per confermare precedenti ricerche sue e di altri sulla formazione dei nervi di senso laterale da catene cellulari costituite da elementi che provengono dagli abbozzi dei rispettivi apparati di senso.

Ora, io credo di fare le mie riserve circa i nervi che provvedono le ampolle. Riserve che trovano la loro ragione in quanto è esposto nella mia comunicazione su citata riguardo al primo manifestarsi di questi nervi ampollari in forma di filamenti protoplasmatici; i quali solo in prosiegua di sviluppo sono accompagnati da elementi nucleati che provengono evidente-

<sup>(1)</sup> V. pag. 289.

<sup>(2)</sup> A. Dohrn, *Die Schwann'schen Kerne, ihre Herkunft und Bedeutung. Erwiderung an A. Kölliker*. 20°. *Studium zur Urgeschichte des Wirbelthierkörpers*. Mittheil. Zool. Stat. Neapel, Bd. 15, 1 u. 2 H. 1901.

mente dal ramo nervoso che provvede anche gli organi di senso laterale al cui fianco si sviluppano le ampolle, raggiungono poi la base delle ampolle stesse e quivi si moltiplicano.

E per quanto mi consta, le relazioni fra la dilatazione terminale del nervo ampollare embrionale, sia essa in forma di clava, o di placca ovale o conica, e la parete dell'ampolla propriamente detta consistono solo di ponti o processi protoplasmatici; talvolta sembra che qualche nucleo della placca si insinui fra la parte basale delle alte cellule dell'ampolla, ma esso può facilmente distinguersi da quelli propri di quest'ultime cellule.

Circa l'ufficio che devesi attribuire a questa « Bodenplatte », convergo su quanto dice Dohrn a pag. 152: « Es scheint unszweifelhaft, dass die Bodenplatte jeder Ampulle den Hauptproductionsplatz für die Zellen bildet, aus welchen der anhaftende Strang besteht ». Ma è da rilevare ancora che essa non raggiunge uguali dimensioni in tutte le ampolle. Essa è maggiormente sviluppata nelle ampolle il cui sbocco o punto d'attacco con l'ectoderma va soggetto a maggiore spostamento in seguito all'accrescimento di volume e al cambiamento della forma esterna del corpo dell'embrione. È evidente che in tali ampolle l'allungamento del dotto non basta a compensare lo spostamento, e i nervi ampollari sono obbligati ad allungarsi; ciò che si verifica perchè nuovi elementi, ordinati in catene cellulari, vengono loro forniti dalla espansione terminale. Una tale compensazione, del resto, è necessaria perchè i dotti ampollari conservino il loro attacco con l'ectoderma e a ciascuna ampolla sia conservato il suo nervo.

In quelle ampolle che vanno soggette a spostamenti meno significanti, l'espansione terminale esiste, ma meno sviluppata.

Siffatta maniera di considerare la formazione e l'accrescimento dei nervi ampollari, basata sulla osservazione delle strutture varie che ci offrono le ampolle durante il loro sviluppo, mentre nulla toglie alla possibilità del loro differenziarsi da catene cellulari, sfugge, secondo io credo, al dilemma troppo assoluto posto dalle due teorie che attualmente si contendono il campo per spiegare la formazione e l'accrescimento de' nervi: quella dei processi nervosi inviati da cellule situate nei centri, e l'altra della connessione primitiva fra centro e organo periferico.

Comunque sia, per me è certo che *i nervi ampollari, già per la loro maniera di svilupparsi, dimostrano di essere di natura alquanto diversa da quella dei nervi di senso laterale*. Io li considererei piuttosto come nervi di senso più generale. Alla stessa conclusione del resto conducono le recenti ricerche di Peabody, Forssell e Retzius sulla istologia delle ampolle e sulla terminazione dei loro nervi nei Selaci adulti. Nessuna distinzione di cellule sensorie e cellule di sostegno si può fare nella parete degli otricoli o nella placca centrale; e le fibre nervose, dopo aver perduto la guaina mielinica, mostrano ciascuna un ingrossamento fusiforme nucleato (ultimo ricordo della



espansione terminale embrionale?) appartenente alla guaina di Schwann, e poi si dividono più volte dicotomicamente per abbracciare con una fitta e fine arborizzazione terminale la parete esterna degli otricoli, e terminare con numerosi ingrossamenti di varia forma addossati alle cellule della parete medesima e talvolta penetranti fra di esse.

**Zoologia.** — *Ricerche osmotiche sugli Infusori*<sup>(1)</sup>. Nota del dott. PAOLO ENRIQUES, presentata dal Socio EMERY.

1. *Introduzione.* — La membrana cellulare o ciò che la sostituisce (ectoplasma) si è mostrata, specialmente per le importanti ricerche di Overton, permeabile all'acqua, ma non in generale alle sostanze disciolte, sia negli animali, sia nelle piante. Conseguenza necessaria di questa proprietà è l'isotonicità dei liquidi endocellulari e pericellulari tra loro. È ormai questo un concetto ammesso per molte tra le cellule interne del corpo degli animali pluricellulari; le cellule esterne, quelle cioè che sostituiscono l'epitelio della pelle, del canale digerente delle branchie, si sottraggono a questa legge della permeabilità all'acqua in molti animali acquatici (pesci teleostei ecc.), nei quali l'ambiente interno è differente per concentrazione dall'esterno; ciò che evidentemente non sarebbe possibile se l'acqua potesse traversare liberamente le membrane. Interessa anche di ricercare se in altri animali vi siano eccezioni in senso contrario, vale a dire se esistano cellule le cui pareti siano permeabili osmoticamente ai sali. Secondo il sig. Quinton<sup>(2)</sup> sarebbe permeabile ai sali la pelle delle Aplisie e di altri invertebrati marini; ma le sue esperienze son state dimostrate fallaci da Bottazzi e da me in un recente lavoro<sup>(3)</sup>, in cui anche si dimostra sperimentalmente la semipermeabilità della membrana gastrica di quegli animali.

Dato come probabile questo concetto, che cioè in generale anche gli animali aventi un ambiente interno isotonico all'esterno, abbiano membrane limitanti l'interno dall'esterno, le quali non permettano il passaggio dei sali per diffusione, merita uno speciale studio il modo con cui molti di questi animali possono adattarsi a vivere in ambienti notevolmente varî osmoticamente. Dovrebbe, come conseguenza della semipermeabilità delle membrane,

(<sup>1</sup>) Queste ricerche e quelle che formano il soggetto delle tre Note seguenti, sono state eseguite nell'Istituto Zoologico di Bologna durante l'anno scolastico 1900-1901.

(<sup>2</sup>) Quinton, *Communication osmotique, chez l'Invertébré marin normal, entre le milieu intérieur de l'animal et le milieu extérieur*. C. R. de l'Acad. Paris, tome 131, pp. 905-908, 1900. — Id., *Perméabilité de la paroi extérieure de l'Invertébré marin, non seulement à l'eau, mais encore aux sels*. Ibid. pp. 952-955, 1900.

(<sup>3</sup>) Bottazzi Ph. u. Enriques P., *Ueber die Bedingungen des osmotischen Gleichgewichts* ecc. A. f. Anat. Phys., Phys. Abt. Supplementband, pp. 109-170, 1901.

un organismo di questi, messo in un ambiente anisotonico, variare di volume per passaggio di acqua, fino al ristabilimento dell'equilibrio. Ma in realtà questa cosa non avviene, o per lo meno non rappresenta un fatto persistente, come è evidente solo che si pensi ad animali che hanno la possibilità di passare dal mare all'acqua dolce dei fiumi; i quali dovrebbero acquistare un volume decuplo e più se così fosse. Quale meccanismo compensatorio insorge?

Le presenti esperienze, fatte su alcuni Protozoi d'acqua dolce (specialmente Infusorî) e sulla *Limnaea stagnalis*, hanno avuto per scopo di aggredire — un po' indirettamente — tale questione; esse mostreranno come la prima reazione di uno di questi animali, immerso in una soluzione anormale, anisotonica, consiste in una variazione di volume, dipendente dal passaggio osmotico dell'acqua; ma dopo un certo tempo il volume torna quello di prima, avvenendo un passaggio di acqua e di sale, tantochè l'animale finisce per essere della stessa grandezza che aveva prima dell'esperienza, avendo aumentata o diminuita la quantità assoluta e relativa di sale nei suoi liquidi organici. Questa seconda reazione si presenta in tali condizioni da apparire intimamente dipendente dalle condizioni di vita e di salute dell'animale, ed appare rientrare in quella categoria di fenomeni che vanno sotto i nomi, rispettivamente, di assorbimento e di escrezione.

Qualche Protozoo (alcuni Flagellati) ha fatto eccezione a questa legge, non presentando in nessun caso la reazione osmotica; onde si deve ritenere probabile che il sale sperimentato (Na Cl) diffonda liberamente attraverso alla loro superficie esterna. Per contro, tale diffusibilità non esiste affatto in alcuni Protozoi senza canale digerente (*Opalina ranarum*), sì che si deve per essi correggere l'antico concetto, che, perchè privi di stomaco, si alimentino per *endosmosi*. L'ingresso delle sostanze anche in essi dipende da altre leggi — fisiologiche — che non sono quelle della diffusione.

2. *Tecnica.* — Nell'esame degli Infusorî, solo per determinarne le specie ed osservarne le minute particolarità, conviene di adoperare i soliti vetrini porta e copri-oggetti. Ma per osservarli nelle loro condizioni quasi normali di vita, val molto meglio di coltivarli in vetrini da orologio (conservati in una camera umida) o addirittura in vaschette di vetro a fondo piano, assai grandi per contenere una diecina di cm. c. di liquido, e munite di coperchio a smeriglio, per poterle conservare a lungo senza evaporazione. Questo sistema aveva per il mio scopo grandi vantaggi, giacchè mi permetteva di far variare molto comodamente la concentrazione del liquido. Prendevo, per esempio, 5 cm. c. di acqua contenente Infusorî (concentrazione quasi 0), ed aggiungevo ad essa 5 cm. c. di Na Cl 2‰; così ottenevo 10 cm. c. di liquido all'1‰. Quando poi volevo col liquido di una vaschetta fare delle prove, in piccolo, di variazione di concentrazione, allora mi servivo di una pipetta costituita di un tubo di vetro tirato in punta non troppo aguzza. Immergendo questa pipetta nell'acqua o in soluzione Na Cl, e poi risolvendola, essa per

capillarità conservava una certa quantità di liquido, che era approssimativamente sempre la stessa. Io potevo in tal modo prendere una piccola porzione da un liquido, per esempio da una vaschetta di esperienza. Soffiando leggermente, versavo questo liquido in un vetrino da orologio; poi prendevo una piccola porzione (uguale) di una soluzione nota, ed anche questa volta riunivo i due liquidi e calcolavo facilmente la concentrazione del miscuglio. Gli Infusorî venivano presi colla pipetta in abbondanza, quando erano abbondanti nel liquido. Quando ve ne erano pochi, bisognava andarne alla caccia, ricercandoli al microscopio: vistine qualcheuno, alzavo rapidamente il tubo del microscopio, per poter immergere nella vaschetta la pipetta, e cercavo di farla andare di contro al centro della lente del condensatore Abbé. Dopo qualche tentativo, uno o due Infusorî venivano presi. Se essi erano nel fondo della vaschetta, naturalmente chiudevo la pipetta col dito all'estremità superiore finchè fosse arrivata al fondo della vaschetta colla punta; allora levavo il dito repentinamente.

Gli Infusorî li ottenevo o con infusi, o raccogliendo dell'acqua stagnante; prendevo acqua, erbe, terriccio ecc. Poi cambiavo l'acqua, lasciando le erbe, ecc., sostituendo l'acqua dello stagno con acqua potabile. Facevo quest'operazione più volte subito, e dopo qualche giorno; così facevo vivere gli Infusorî sempre nell'acqua potabile, che ha una concentrazione quasi 0, e da questo ambiente li prendevo per disporre e fare le esperienze.

3. *Alcuni Infusorî delle acque stagnanti.* — Cominciamo a vedere quanto possono esser sensibili alle soluzioni concentrate gli Infusorî di acqua dolce.

ESPERIENZA I. — Presa dell'acqua stagnante da un fosso, se ne separano due porzioni: in A, si aggiunge Na Cl fino alla concentrazione di 0,5 ‰; la porzione B serve di confronto. Già l'indomani in A non vi sono più Infusorî; in B ve ne sono parecchi. Alla superficie di A vi sono però molte cisti. I flagellati si conservano su per giù ugualmente nelle due porzioni.

La causa di questa estrema sensibilità, per la quale una differenza di concentrazione di 0,5 ‰ produce l'incistidamento, è evidente. La concentrazione interna dell'Infusorio essendo piccolissima, quasi 0, ne segue che, per quanto poco sale si aggiunga nell'ambiente esterno, se si deve raggiungere l'equilibrio per il passaggio dell'acqua, quasi tutta l'acqua deve uscire dall'Infusorio.

Cito un altro esempio.

ESPERIENZA II. — Vorticelle (*Vorticella nebulifera*) viventi nell'acqua potabile (concentrazione circa 0). Siccome, quando sono posate sul vetrino porta-oggetti, si attaccano ad esso col piede, si può benissimo sostituire il liquido in cui si trovavano, con un altro, senza perderle. Alcune, poste in Na Cl 5 ‰, dopo pochi istanti cessano le contrazioni e i movimenti cigliari, e divengono grinzose, restringendosi.

Altre son messe in soluzione di Na Cl 1 ‰. Dapprima si ha un breve stato contrattorio del filamento e del corpo cellulare. Poi ricomincia la distensione, ma non è com-



pleta la distensione del corpo cellulare. In una, dopo 15' le ciglia non vibrano più. Dopo 30', la distensione è di nuovo completa, le ciglia vibrano. Finiscono però tutte per morire un po' ingrinzite entro qualche ora.

Ma è inutile insistere su questo punto, che gli Infusorî cigliati delle acque dolci sono pochissimo resistenti alle soluzioni concentrate. E giacchè la morte avviene con la superficie del corpo cellulare ingrinzita, e il corpo stesso diminuito di grandezza, è evidente che la causa è la perdita di acqua per osmosi, e che il Na Cl *non traversa*, in queste condizioni di esperienza, *le pareti che nell'Infusorio separano l'interno dall'esterno*. Ma, se così fosse senza eccezione, non si potrebbe avere in questi animali nessuna adattabilità alle soluzioni concentrate. I fatti dimostrano il contrario.

ESPERIENZA III. — Gen. *Halteria*, Dujardin. Questi piccoli cigliati sono molto curiosi per il modo di procedere, ora in un senso, ora nell'altro, a scatti, fermandosi ogni tanto. Li ho trovati in un'acqua stagnante, e coltivati nell'acqua potabile. Vale a dire, per più volte di seguito, le erbe dell'acqua stagnante raccolta furono cambiate di acqua, e poste in acqua potabile fresca. In un piccolo recipiente finirono questi cigliati per prevalere moltissimo sulle altre specie di Protozoi, rimanendo quasi soli ed abbondantissimi.

Col metodo della pipetta viene provata la loro resistenza alle soluzioni di Na Cl. Come regola generale, quando vengono posti in soluzioni concentrate, essi reagiscono in questo modo: immediatamente cominciano a correre rapidissimi per il liquido, cambiando direzione quando arrivano ai confini del liquido, e poche volte spontaneamente. Quando è vicino il loro ultimo momento, rallentano la loro corsa moltissimo, cominciano a procedere innanzi lentamente, e con moto irregolare, ruotando su sè stessi; si comincia già a distinguere la superficie del corpo grinzosa. Poi fanno qualche oscillazione, una piccola piroetta finale e si fermano. Le ciglia continuano a vibrare per qualche tempo. La forma del corpo, un poco triangolare normalmente, è più accentuatamente triangolare, la superficie notevolmente grinzosa, e le dimensioni ridotte. Morti, vengono alla superficie del liquido. Questi fenomeni si succedono nelle loro fasi più o meno rapidamente, secondo la concentrazione del liquido in cui gli animali vengono trasportati.

Da ripetute prove risultano come medie i seguenti numeri esprimenti il tempo della sopravvivenza nelle varie soluzioni di Na Cl:

1 ‰	2 ‰	3 ‰	4 ‰	5 ‰	1 %	2 %	3 %	5 %
	circa 2 <sup>a</sup>	circa 10'	circa 4'	1',30"	45"	15"	6-7"	0

Le prove sono state fatte mescolando rapidamente quantità uguali dell'acqua cogli Infusorî e di soluzioni di Na Cl di concentrazione doppia di quella indicata nella tabella (metodo della pipetta).

11 Aprile, ore 15. Alcune porzioni dell'acqua colle *Halteriae* vengono mescolate con soluzioni di Na Cl, in modo da portarle alla concentrazione:

a) 0,5 ‰

b) 1 ‰

12 Aprile, ore 10. In *a* quasi tutte le *Halteriae* sono ancora vive; in *b* molte: ma vi sono dei cadaveri alla superficie del liquido.

Prova della resistenza: le *Halteriae* delle porzioni *a*, portate alla concentrazione di Na Cl 1 % muoiono in circa 50"; di 5 % in 2' 40".

Quelle delle porzioni *b* alla concentrazione di 1 %, in 50".

In questi Infusorî, abituati da un giorno alla concentrazione di 0,5 ‰ Na Cl, la resistenza alle soluzioni più forti è un po' aumentata; muoiono

in 50" anzichè in 45" in Na Cl 1 ‰, e in 2' 40" anzichè in 1' 30" in Na Cl 5 ‰.

20 Aprile. ore 10. In *a* le *Halteriae* sono ancora vive, ma più scarse. In *b* pochissime, e notevolmente grinzose. In tutte le porzioni sono aumentati grandemente dei *Chilodon* (Ehrenberg), prima scarsissimi: specialmente nelle porzioni *b* ove sono comunissime le forme di divisione.

20 Aprile. ore 17. Le stesse condizioni. Prova della resistenza: le *Halteriae* delle porzioni *a* portate alla concentrazione di 1 ‰ muoiono in 30" circa.

21 Aprile. ore 10. In *a* non molte *Halteriae*, assai grinzose. In *b* nessuna *Halteria*, molti *Chilodon*.

22 Aprile. Morte tutte le *Halteriae*.

In questa esperienza, le *Halteriae* poste in Na Cl 0.5 ‰ hanno resistito per qualche giorno, ma hanno poi finito per morire raggrinzite. Dapprima la loro resistenza alle soluzioni più concentrate era aumentata, poi diminuita. Disenteremo dopo questi risultati. Intanto qui siamo sempre nel caso di tentativi infruttuosi di adattamento alle soluzioni più concentrate. Ma esaminiamo i risultati di quest'altra esperienza.

ESPERIENZA IV. — A 5 cm. c. di acqua contenente moltissime *Halteriae*, qualche *Chilodon* e qualche *Gastrostyla Steinii* (Engelmann) si aggiungono, nel corso di vari giorni, 5 cm. c. di Na Cl al 4 ‰. E precisamente nel modo seguente:

20 Aprile, cm.c. 1,5.	Si arriva così alla concentrazione di Na Cl	0,5 ‰
21 " " 0,5	" " "	1,1 ‰
22 " " 0,5	" " "	1,8 ‰
23 " " 0,5	" " "	1,5 ‰
24 " " 1,0	" " "	1,7 ‰
25 " " 0,5	" " "	1,8 ‰
26 " " 0,5	" " "	2 ‰
5,0		

Durante questo graduale aumento di concentrazione le *Halteriae*, alquanto grinzose, sono assai diminuite di numero, per la morte di alcune. I *Chilodon* sono aumentati, ed ancor più i *Gastrostyla*.

27 Aprile. ore 9. *Halteriae* in Na Cl 1 ‰ muoiono in (varie prove): 65' 40"-30' 40"-34". Si nota una certa irregolarità di comportamento, secondo gli individui.

28 Aprile. Le *Halteriae* sopravvissute non sono più grinzose. Anzi appaiono rotondegianti e più rigonfiate del normale. Nei giorni successivi si avvicinano di più all'aspetto normale.

29 Aprile. Le *Halteriae*, portate alla concentrazione di Na Cl 0.5 ‰ (mediante 3 volumi di acqua distillata), muoiono in circa 7-8". Dapprima intraprendono la solita corsa furiosa, che si fa a un certo punto più disordinata. Ad un tratto l'infusorio scoppia, riducendosi in minutissimi frammenti, che si disperdono.

Questi ultimi risultati sono molto notevoli. Mostrano che nell'interno delle *Halteriae* la concentrazione è aumentata per ingresso di Na Cl. Infatti messe in una soluzione nella quale a stento resistono le *Halteriae* normali, perchè troppo concentrata, queste muoiono per rigonfiamento ed assunzione di acqua. Dopo il primo periodo di reazione osmotica alle soluzioni concen-

trate, nel quale si aveva il solito raggrinzimento, ne è sottentrato un altro, in cui gli Infusori sono al contrario più rigonfiati, periodo transitorio anche questo, per ritornare poi ad un aspetto quasi normale. In questo ultimo stadio, in cui si hanno presso a poco le dimensioni primitive, l'assunzione di acqua alla concentrazione di 5 ‰ dimostra evidentemente che il sale interno è in maggior quantità che all'inizio dell'esperienza. Ma quale significato ha quel periodo transitorio di aumento di volume? È evidente che questa seconda reazione indica, in questo momento, l'assorbimento di qualche cosa dall'esterno. Sarà acqua soltanto? No, perchè allora i succhi interni si diluirebbero di nuovo alla concentrazione primitiva stabilendosi un disequilibrio osmotico tra l'interno e l'esterno; ma non c'è bisogno di negare *a priori* questa possibilità; la nega *a posteriori* l'esperienza dello scoppimento in Na Cl 0,5 ‰. Dunque in quel periodo, nell'Infusorio entra acqua e sale. In queste condizioni si deve ritenere che le *Halteriae* si fossero adattate alla maggior concentrazione. Infatti, l'esperienza continua:

3 Maggio. Le *Halteriae* non accennano a diminuire ulteriormente di numero.

29 Aprile, ore 15. Alcuni *Chilodon* e *Gastrostyla* si portano alla concentrazione di Na Cl 0,5 ‰. Reagiscono con movimenti violenti, ma poi si calmano.

30 Aprile, ore 9. Sono tutti morti.

29 Aprile, ore 15. 5 cm. c. di liquido vengono tolti dalla vaschetta dell'esperienza, e messi in un'altra vaschetta. Si parla ormai di questa nuova vaschetta. Si aggiunge 1 cm. c. di Na Cl 8 ‰ (si arriva così alla concentrazione di 3 ‰).

30 Aprile, ore 9. Le *Halteriae* sono tutte morte. Sopravvivono specialmente i *Gastrostyla*. Si aggiunge 1 cm. c. di Na Cl 8 ‰ (concentrazione: 3,7 ‰).

1 Maggio. I *Gastrostyla* sono diminuiti.

3 " I *Gastrostyla* non sembrano ulteriormente diminuiti.

4, 5, 6 Maggio. Si aggiunge ogni giorno 1 cm. c. di Na Cl 8 ‰ e si arriva così finalmente alla concentrazione di 5 ‰.

8 Maggio, ore 14. I *Gastrostyla* vivono in queste condizioni. Ne vien posto uno in Na Cl 2,5 ‰.

9 Maggio, ore 9. Questo *Gastrostyla* è morto.

10 Maggio. Un *Gastrostyla*, condotto alla concentrazione di 1 ‰ Na Cl, dopo 3' di piccoli giramenti ne fa qualcheduno più disordinato; poi rallenta di nuovo; si nota la superficie grinzosa. Dopo 11' è quasi fermo. Dopo 12' riprende un po', fa 2 o 3 movimenti, e poi cessa di nuovo per sempre. Le ciglia però vibrano ancora fino verso le ore 11,15'. Altre prove danno risultati simili.

Il 27 di Aprile erano state fatte prove coi *Gastrostyla* che vivevano al 2 ‰. Essi morivano, trasportati alla concentrazione di 1 ‰, in circa 2'.

Abbiamo dunque, per quest'altra specie, gli stessi risultati: mano mano che si aumenta la concentrazione dell'ambiente, senza che gli Infusori muoiano, aumenta la resistenza alle soluzioni più concentrate, e diminuisce per quelle che sono ora più diluite. Quando, nell'esperienza III, le *Halteriae* viventi in Na Cl 0,5 ‰, mostravano una resistenza alle soluzioni concentrate, diminuita, (21 aprile), ciò dipendeva dal fatto che esse non si erano potute adattare, questa volta, alle nuove condizioni di vita. Infatti esse erano sempre



rimaste grinzose, e poco dopo morirono. Esse non avevano assorbito sale, e perciò l'essere già in soluzione un po' più concentrata rappresentava per loro uno svantaggio. Ecco come le apparenti discordanze nei risultati, quando tutte le condizioni siano accuratamente considerate, illuminano invece sempre di più questo fenomeno dell'*adattamento* alle soluzioni concentrate.

Poichè per ora si tratta di Infusori che sono forniti di canale digerente, può sorgere il dubbio che i due momenti di reazione (perdita di acqua, assunzione di acqua e sale) siano dovuti all'entrata in gioco di membrane differenti: prima, la parete esterna del corpo cellulare, semipermeabile; poi la parete del canale digerente, capace di lasciar passare anche il sale. Veramente la supposizione non regge, perchè bisognerebbe ammettere nel 1° momento di reazione un meccanismo di chiusura della bocca, meccanismo che, in realtà, non sembra esistere. Ma pure ho voluto sperimentare su un Infusorio privo di canale digerente e di apertura buccale, per vedere se la parete esterna del corpo, che funge necessariamente da membrana assorbente, perchè non ce ne sono altre con cui venga in contatto il liquido ambiente, presentasse ostacolo al passaggio dell'Na Cl.

#### 4. Infusori privi di canale digerente (*Opalina*).

ESPERIENZA V. — *Opalina ranarum*. Infusorio parassita dei girini di rospo, nel cui intestino si trova. La forma è allungata, e l'animale procede flessuosamente, spinto dai movimenti delle ciglia laterali del corpo, le quali si muovono ad onde procedenti dall'avanti all'indietro.

Preso a un girino il pezzo di intestino che contiene abbondantissimi questi Infusori, lo ponevo su un vetrino da orologio, e lo aprivo. La quantità di liquido contenuta in questo pezzetto è scarsissima, sì che, aggiungendo abbondante quantità di una soluzione di Na Cl, si ha in definitiva con molta approssimazione la stessa concentrazione della soluzione adoperata.

È difficile sperimentare su questi Infusori, perchè dopo qualche giorno muoiono, in qualunque soluzione siano stati messi.

In acqua distillata, le *Opalinae* si rigonfiano in pochi minuti, divenendo completamente tonde; muoiono presto, ma per qualche minuto si muovono anche dopo essere arrotondate.

In Na Cl 1‰, si trovano tutte morte il giorno dopo, assai rigonfiate.

In Na Cl 2 e 3‰, le stesse cose, meno accentuate.

Anche in Na Cl al 4 e al 5‰, in generale le *Opalinae* muoiono in un giorno, rigonfiate alquanto. Una volta però in un vetrino con Na Cl al 4‰, qualche *Opalina* sopravvisse anche più di 2 giorni, un poco rigonfiata. Dopo tre giorni dall'inizio dell'esperienza, erano ancora vive, e non più rigonfiate. Presentavano l'aspetto normale.

In Na Cl 6-7‰ le *Opalinae* vivono per qualche giorno, senza visibilmente alterarsi. Deve essere infatti questa su per giù la concentrazione più abituale del contenuto intestinale dei girini, probabilmente simile, in generale, a quella del loro sangue.

In Na Cl 8-9‰ un giorno o due qualche volta resistono. Ma sono molto visibilmente contratte. I fenomeni del rigonfiamento e della contrazione per perdita d'acqua in questi animali sono molto facilmente riconoscibili, perchè il rigonfiamento porta ad un

accorciamento, e ingrossamento; la contrazione, a una diminuzione dei diametri trasversali, mentre che il diametro longitudinale non varia.

In Na Cl 1 % circa come sopra, solo più accentuata la contrazione.

In Na Cl 3 % muoiono subito in grande contrazione.

Dunque anche in questi Infusorî privi di canale digerente vi è la stessa sensibilità alle soluzioni anisotoniche, le quali producono restringimento o rigonfiamento negli animali, evidentemente perchè l'acqua sola può passare a ristabilire l'equilibrio. Quando quelle *Opalinae* che sopravvissero più a lungo delle altre in Na Cl al 4 ‰, dapprima gonfiatesi, tornarono alla forma primitiva, evidentemente non uscì fuori soltanto l'acqua che era stata assorbita in più, per portare i succhi interni alla stessa concentrazione esterna, ma sale e acqua nelle stesse proporzioni della concentrazione interna ed esterna, in modo da conservare la condizione di isotonicità tra dentro e fuori. Assistiamo qui, in senso inverso, allo stesso fenomeno già osservato per gli altri Infusorî presi in esame.

I risultati delle esperienze esposte in questa Nota si possono insomma così riassumere:

*Gli Infusorî trasportati da un ambiente ad un altro di tonicità diversa, presentano dapprima una variazione di volume dovuta a passaggio di acqua attraverso alla loro parete, osmoticamente impermeabile ai sali; poi una variazione di volume inversa, per passaggio non osmotico di acqua e sali (assorbimento o escrezione secondo i casi) la quale può anche temporaneamente oltrepassare le condizioni iniziali.*

*Gli Infusorî privi di canale digerente hanno la parete esterna impermeabile (per endosmosi) al Na Cl disciolto nell'acqua.*

## PERSONALE ACCADEMICO

Il Vicepresidente BLASERNA annuncia che alla seduta assistono i Soci stranieri R. LEPSIUS e P. SABATIER.

Lo stesso VICEPRESIDENTE dà la dolorosa notizia della morte del Socio straniero A. M. CORNU, e legge il seguente cenno necrologico del defunto Accademico.

ALFREDO MARIA CORNU nacque il 6 marzo 1841, studiò nell'École polytechnique e nell'École des Mines, ottenne il diploma d'ingegnere nel 1866, e fu nominato nell'anno 1871 professore di Fisica alla Scuola politecnica, carica che egli tenne fino alla sua morte.

Entrò nell'Accademia di Parigi nel 1878 e appartenne alla nostra Accademia fino dal 26 agosto 1896 in qualità di Socio straniero.



Esordì brillantemente nella carriera scientifica colla sua tesi di laurea, in cui trattò della riflessione cristallina, tentando di perfezionare la teoria di Fresnel col modificarne le condizioni e i limiti fra i due mezzi. Questa prima ricerca esercitò un'influenza decisiva su tutto l'indirizzo della sua vita scientifica, in cui si occupò principalmente di ottica, e rivelò presto il valore del suo ingegno.

Non mi sarebbe possibile seguire una ad una le molte sue ricerche; mi permetta però l'Accademia di raggrupparle e di dare un breve cenno almeno delle principali.

Lo studio delle radiazioni più rifrangibili lo occupò a parecchie riprese e di lui rimane uno studio accuratissimo dello spettro ultravioletto solare, in continuazione del celebre atlante dell'Angström. Interessanti ricerche laterali ebbe poi a compiere sull'assorbimento atmosferico dello spettro ultravioletto; così rimanendo sempre nel campo della Spettroscopia è a ricordarsi la sua ingegnosa e semplicissima disposizione dell'immagine solare oscillante sulla fenditura dello spettroscopio che permette di distinguere immediatamente le linee solari dalle telluriche.

Al Cornu la scienza va debitrice di studî molto eleganti sulle condizioni di acromatismo nei fenomeni d'interferenza, la soluzione del problema della fotometria per luce polarizzata, ricerche sui reticoli di diffrazione e sulle loro anomalie focali. Ed a proposito dei suoi studî sul fenomeno Zeeman, giova ricordare la scoperta che la  $D_1$ , normalmente alle linee di forza magnetica, si scompone in quattro linee, risultato che non ebbe forse ancora una spiegazione teorica soddisfacente.

Lavoro d'importanza capitale fu quello sulla velocità della luce, in cui perfezionò il metodo di Fizeau e con una bella serie di misure giunse a fissarne il valore in 300,400 chilometri al secondo, valore che si può ancora oggidì considerare come molto preciso.

Da questo argomento era naturale che egli volgesse la sua mente a problemi di geodesia e di astronomia, fra i quali ricordo le belle ricerche di fotografia astronomica, la costruzione di una mira lontana nell'osservatorio di Nizza e il suo apparecchio zenito-nadirale.

Voglio poi menzionare, fra le ricerche di fisica terrestre, la determinazione della densità della terra, eseguita in modo magistrale e che deve considerarsi come una delle migliori fin qui esistenti.

Non vi è quasi ramo di Fisica, che egli non abbia coltivato. In fatto di acustica devono ricordarsi le sue ricerche sugli intervalli musicali, nel caso di melodia e di armonia, e quelle sulle vibrazioni rotanti, che accompagnano le trasversali delle corde.

Il Cornu fu in tutta la sua vita grande maestro dell'arte sperimentale; se anche non ebbe concetti nuovi originali, la critica fine e incisiva dei metodi e delle disposizioni sperimentali gli assicureranno sempre un alto posto



nella scienza. Negli ultimi anni della sua vita, troncata all'improvviso, egli fu membro autorevole del Comitato internazionale di Pesi e Misure, per il quale la recente sua perdita rimarrà molto sensibile.

Fu anche grande maestro di conferenze popolari ed aveva un talento tutto speciale di mettere a portata di molti le teorie più elevate della sua scienza.

Morì all'età di poco più di 60 anni, e sto per dire, in pieno vigore della sua vita. Mandiamo all'illustre consorella di Parigi le condoglianze della nostra Accademia per la prematura perdita di un membro così importante.

V. C.

